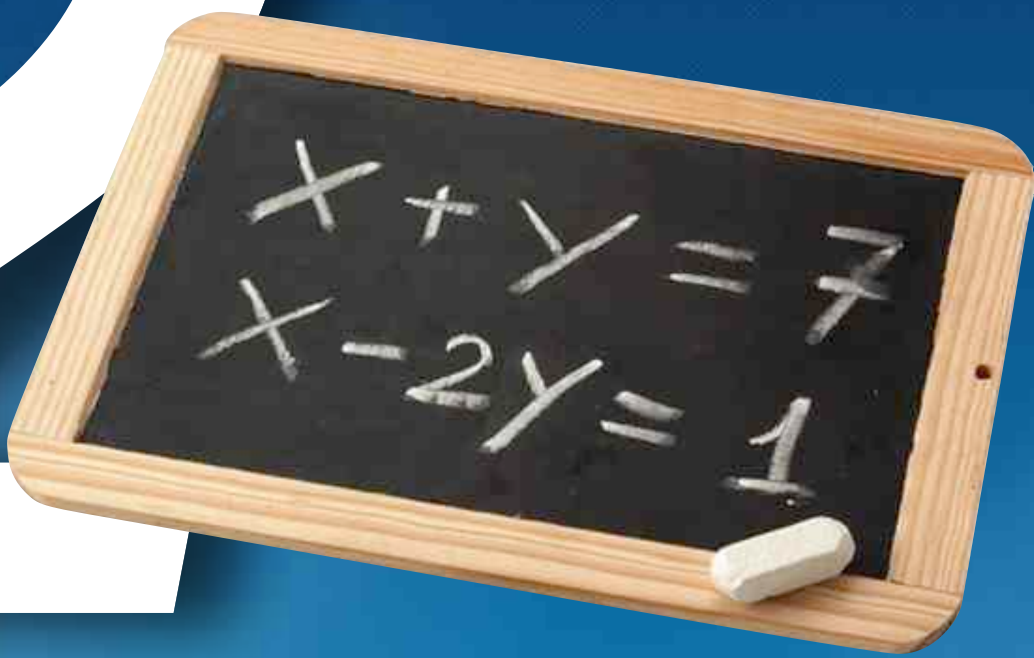
Cuadernillo de actividades

DESARROLLO DE HABILIDADES MATEMÁTICAS

2o. grado



Secundaria

PROEDUCA
Formación Integral

seg.guanajuato.gob.mx

gto
Gobierno del Estado

Secretaría
de Educación

El *Cuadernillo de actividades para el desarrollo de habilidades matemáticas de segundo grado de secundaria* fue desarrollado por la Secretaría de Educación de Guanajuato.

Secretaría de Educación de Guanajuato

Primera edición, 2011

Secretaría de Educación de Guanajuato, 2011
Conjunto Administrativo Pozuelos s/n, Centro,
36000, Guanajuato, Gto.

Impreso en México
Distribución Gratuita – Prohibida su venta

Estimados alumnos y alumnas:

Cuando practicas un deporte y quieres llegar a destacar en él, entrenas constantemente para llegar a ser el mejor. Por ejemplo, para jugar bien al fútbol, es importante saber recibir el balón, dar pases correctamente y anotar goles.

Con las matemáticas ocurre algo muy similar: para poder resolver problemas, algo que te puede ayudar de manera significativa es seguir el proceso de matematización, que consiste de cinco pasos sencillos:

1. **Identificar un problema de tu entorno que pueda ser tratado como un problema matemático**, desde situaciones sencillas, como por ejemplo, medir un objeto, ver cuánto cabe en él, hasta saber calcular el precio de un producto si se aplica un porcentaje de descuento.
2. **Identificar el conocimiento matemático necesario para resolver el problema**, comenzando por leer bien el problema para comprender de qué o de quién se habla y saber qué operaciones necesitas hacer para resolverlo.
3. **Formular un modelo matemático que represente el problema**, que pueden ser dibujos, barras, gráficas, fórmulas, etc., en donde se ilustre la información obtenida del problema.
4. **Resolver el problema utilizando fórmulas, procedimientos o métodos** que ya conoces y que te pueden ayudar a dar solución, planteando varias estrategias diferentes para resolverlo.
5. **Interpretar la solución del problema en tu vida cotidiana** escribiendo la respuesta siempre como una oración completa donde expreses el resultado obtenido, para que cualquier persona que lo vea lo pueda entender claramente.

Tomando en cuenta lo anterior, la Secretaría de Educación de Guanajuato te ofrece el ***Cuadernillo de actividades para desarrollo de habilidades matemáticas***, el cual está intregrado por una serie de actividades que te servirán de apoyo para repasar todos los contenidos que estudias a lo largo del ciclo escolar en la asignatura de matemáticas, fortaleciendo tus habilidades para convertirte en una persona capaz de resolver y comprender situaciones de la vida cotidiana a través del lenguaje matemático, obteniendo herramientas y conceptos que te ayuden a ser capaz de construir nuevos conocimientos y poderlos compartir a las personas que te rodean y sentirte creativo, seguro de ti mismo, útil y competente, además de prepararte, de forma amigable, para las evaluaciones estatales y nacionales.

Es un cuadernillo de apoyo, cuyo propósito no es que apruebes un examen, sino que te sientas cada vez más seguro de lo que aprendes en clase, de modo que los examenes y, sobre todo, la aplicación de las matemáticas en tu vida diaria, te resulte más fácil y natural.

Te invitamos a que encuentres en este cuadernillo una forma sencilla y agradable para identificar tus debilidades y fortalezas y potencializar tus habilidades matemáticas.

Estimados docentes y padres de familia:

Los retos actuales en el ámbito educativo requieren la implementación de nuevas estrategias que logren formar a los estudiantes como seres capaces de enfrentar y responder a los problemas de la vida actual, y por lo tanto, ante el mundo que los rodea.

La Secretaría de Educación de Guanajuato considera importante que el fortalecer las habilidades y conocimientos matemáticos ayudará a los alumnos a que se interesen en buscar la forma de resolver los problemas que se les plantean, compartiendo sus ideas, reflexionando, mostrando una actitud de gusto por aprender los contenidos matemáticos, experimentando en su entorno escolar con la guía adecuada de los docentes y dentro del entorno familiar, ya que a través de éstos los alumnos pueden reafirmar sus conocimientos, no sólo en el área de matemáticas, sino en todas las asignaturas, fomentando con ello un crecimiento académico y personal.

Por tal motivo, se diseñó el ***cuadernillo de actividades para el desarrollo de habilidades matemáticas*****,** como una herramienta de acompañamiento y apoyo para que los alumnos refuercen sus habilidades y conocimientos matemáticos a partir del trabajo conjunto entre ustedes: los docentes detectando las áreas que es necesario fortalecer en sus alumnos, y los padres de familia dando seguimiento a los avances de sus hijos.

Está dividido en cinco bloques, al igual que el plan de estudios vigente de la Secretaría de Educación Pública, y apegado a los contenidos del programa para la asignatura de matemáticas. Cada tema inicia con la fundamentación teórica, una serie de ejemplos y después las actividades que el alumno tiene que resolver. Al final de cada bloque, se presenta una autoevaluación tipo ENLACE para reforzar lo practicado en el bloque, y que el alumno pueda medir su aprendizaje.

No cabe más que recordarles que para la implementación de este recurso, y para seguir fomentando el gusto por las matemáticas en nuestros alumnos e hijos, es fundamental la participación y compromiso de ustedes, de modo que continuemos haciendo de Guanajuato un mejor estado.

Índice

Bloque 1

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Significado y uso de las operaciones. *7*

Multiplicación y división de números con signo........ 7

Problemas aditivos con expresiones algebraicas. 10

Expresiones algebraicas y modelos geométricos 14

Forma, espacio y medida

Formas geométricas. *16*

Ángulos. 16

Rectas y ángulos........ 22

Ángulos entre paralelas........ 24

Manejo de la Información

Análisis de la Información *28*

Proporcionalidad directa........ 28

Proporcionalidad múltiple 36

Representación de la información. *38*

Problemas de conteo 38

Polígonos de frecuencias 39

Autoevaluación Bloque 1. .... **40**

Bloque 2

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Significado y uso de las operaciones. *43*

La jerarquía de las operaciones. 43

Multiplicación y división de polinomios. 45

Forma, espacio y medida

Formas geométricas. *48*

Cubos, prismas y pirámides. 48

Medida. *52*
Volumen de prismas y pirámides. 52
Aplicación de volúmenes 55

Manejo de la información
Análisis de la información. *58*
Comparación de situaciones de proporcionalidad 58
Representación de la Información. *61*
Medidas de tendencia central 61

Autoevaluación Bloque 2. .... **63**

Bloque 3

Sentido numérico y pensamiento algébrico
Significado y uso de las literales. *65*
Sucesiones de números con signo. 65
Significado y uso de las literales. *66*
Ecuaciones de primer grado 66

Manejo de la información
Representación de la información *73*
Relación funcional 73

Forma, espacio y medida
Formas geométricas. *76*
Los polígonos y sus ángulos internos. 76
Mosaicos y recubrimientos 81

Manejo de la información
Representación de la Información. *82*
Las características de la línea recta. 82

Autoevaluación Bloque 3. .... **84**

Bloque 4

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Significado y uso de las operaciones. *86*

Potencias y notación científica. 86

Forma, espacio y medida

Formas geométricas. *88*

Triángulos congruentes 88

Puntos y rectas notables de un triángulo 94

Manejo de la información

Análisis de la información. *97*

Eventos independientes 97

Representación de la Información. *101*

Gráficas de línea. 101

Graficas formadas por rectas 103

Autoevaluación Bloque 4. .... **107**

Bloque 5

Sentido numérico y pensamiento algebraico

Significado y uso de las literales. *109*

Sistemas de ecuaciones. 109

Manejo de la Información

Representación de la Información. *124*

Representación gráfica de sistemas de ecuaciones 124

Autoevaluación Bloque 5. .... **134**

Referencias

Bibliográficas *137*

Digitales *137*

Bloque 1.

Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Significado y uso de las operaciones.

Multiplicación y división de números con signo.

En esta sección aprenderás a resolver problemas que impliquen multiplicaciones y divisiones de números con signo.
En esta sección tenemos tres condiciones de regularidad para la multiplicación y tres para la división.

Multiplicación			
1	Dos números con diferente signo	(-2)(4) = - 8	Resultado siempre negativo.
2	Uno de los factores es cero	(0)(-2) = 0 (-3)(0) = 0	Resultado siempre es cero
3	Dos números con mismo signo (positivo/ negativo)	(2)(4) = 8 (-2)(- 4) = 8	Resultado siempre positivo

División			
1	Dos números con diferente signo	8 -2 = - 4 -6 3 = -2	Resultado siempre negativo.
2	Cero como divisor Cero como dividendo	- 2 0 = 0 -2 = 0	Resultado indeterminado Resultado siempre cero.
3	Dos números con mismo signo (positivo/ negativo)	4 2 = 2 -4 -2 = 2	Resultado siempre positivo

Para multiplicar números con signo se multiplican los valores absolutos de los números y luego se determina el signo del resultado utilizando la regla de los signos cuando multiplicamos.

Positivo por positivo el resultado es positivo (+) (+) = +
Positivo por negativo el resultado es negativo (+) (-) = -
Negativo por positivo el resultado es negativo (-) (+) = -
Negativo por negativo el resultado es positivo (-) (-) = +

Para hacer divisiones entre números con signo se dividen los valores absolutos de los números y luego se encuentra el signo del resultado utilizando la regla de los signos.
Cuando dividimos.

Positivo entre positivo el resultado es positivo (+) (+) = +
Positivo entre negativo el resultado es negativo (+) (-) = -
Negativo entre positivo el resultado es negativo (-) (+) = -
Negativo entre negativo el resultado es positivo (-) (-) = +

Ejercicios.

1. Las siguientes dos tablas describen el descenso de temperaturas en dos cámaras de refrigeración. Calcula los datos que faltan en ambas, tomando en cuenta que el descenso de temperaturas fue constante e inició en 0° C.

Minutos	Temperatura
1	
2	
3	
4	
5	- 15 ° C
6	
7	
8	
9	

Minutos	Temperatura
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	- 13.5° C

2. Completa los casilleros en blanco de las siguientes tablas.

Multiplicación				
-2	.		=	
-3	.		=	
-4	.		=	-36
-5	.		=	
-6	.		=	-54
-7	.		=	
-8	.		=	
-9	.		=	

División				
-36			=	
-54			=	
-69			=	23
-72			=	
-81			=	
-84			=	
-93			=	
-96			=	

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) (-7)(5)(-4) =

b) $(-5)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right) =$

d) $(-3)\quad\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{2}{7}\right) =$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)\quad\left(\frac{3}{2}\right) =$

4. Evalúa cada expresión.

(

–

—

Problemas aditivos con expresiones algebraicas.

En esta lección aprenderemos a resolver problemas de adición y sustracción de expresiones algebraicas.

Para reducir expresiones algebraicas que contienen sumas y restas debemos sumar o restar coeficientes de cada una de ellas utilizando las reglas para sumar números enteros. Al resultado final le colocaremos la parte literal que tenga ambos monomios.

$3n + 2n = 5n$

Sumados 3 + 2 = 5 y colocamos la parte literal que tienen ambos

$5n – 3n = 2n$

Restamos 5 – 3 = 2 y colocamos la parte literal que tienen ambos.

1. En la figura coloca los siguientes valores de tal manera que en forma vertical y horizontal la suma sea 7 a.

a 3 a 4 a 6 a

-5 a 8 a - 3 a -2 a 9 a

2. Efectúa el siguiente “truco” con algunos de tus compañeros:

Piensa un número.

Súmale 5

Réstale el número que pensaste.

El resultado da 5

Explica el “truco” para adivinar el resultado.

3. Contesta:

¿Es cierto que la suma de cuatro números consecutivos es múltiplo de 4?

Comprueba con varios valores tu respuesta.

4. Realiza el siguiente "truco" con algunos de tus amigos:

Piensa un número que esté entre 1 y 20.

Súmale a ese numero 20 y escribe el resultado.

Ahora réstale a 20 el número que pensaste y anota el resultado.

Suma los dos resultados.

Explica el "truco" para adivinar el resultado.

5. A partir de los binomios dados, forma polinomios; de tres a seis términos.

a) $3x + \frac{1}{3}x$

b) $1.25x - (-5x)$

c) $3x + 7x$

d) $3x + (-5x)$

6. Completa la tabla sustituyendo los valores de las variables en las expresiones dadas. Sigue el ejemplo.

a)

Expresión	m= 2, n= 3	m=-5, n=2
$3mn$	(3)(2)(3) = 18	(3) (-5) (2)= -60
$4m^2n^3$		$(4)\ (5)^2\ (2)^3 = 800$
$5mn^3$		
$7m^3 n^2$		

b)

Expresión	m= 1, n=- 2	m=-2, n=-5
$3mn$		
$4m^2n^3$		
$5mn^3$	$(5)\ (-1)\ (2)^3 = -40$	
$7m^3 n^2$		$7(-2)^3\ (5)^2 = (7)(-8)(25) = 1200$

c)

X	$3x + 2$	$2x^2 -6x +4$
0		
-1		
3		
-2		
6		

d)

X	$x^3 – 2x +4$	$3x^3 -2x^2 +6x - 11$
0		
-1		
3		
-2		
6		

e)

x	$(x+1)(x+3)$	$(x-6)(x+4)$
0		
3		
-3		
4		

f)

X	$(2x- 4) (x -3)$	$(2x^2 -1) (3x^2 + 4)$
0		
3		
-3		
4		

Ejercicio 7:

1. Toma el cuadrado mágico chino "lo-shu".

2. Piensa en el número que tú quieras.

3. El número que pensaste súmalo, réstalo o multiplícalo con cada uno de los números del cuadrado original, acomodando los resultados en los mismos lugares.

El cuadrado que queda también es mágico.

a Ejemplos

4	9	2
3	5	7
8	1	6

12	27	6
9	15	21
24	3	18

Se multiplica cada número del original por 3

Cuadrado "lo-shu"

b

4	9	2
3	5	7
8	1	6

-1	4	-3
-2	0	2
3	-4	1

cuadrado "lo-shu"

A cada número del cuadro original se le resta 5

c

4	9	2
3	5	7
8	1	6

10	15	8
9	11	13
14	7	12

cuadrado "lo-shu"

A cada número del cuadro original se le suma 6

Ejercicio 8:

1. Piensa en un número cualquiera.

2. Escríbelo en la parte superior izquierda de una hoja.

3. Ahora piensa en dos números más que sean distintos. Estos números se irán sumando al número que tenías escrito en la hoja, uno de manera horizontal y el otro de manera vertical hasta obtener nueve números distintos.

4. Haz una lista con estos números ordenándolos de menor a mayor.

5. Escribe el cuadrado mágico "lo-shu" y sustituye sus números con los nuevos de la siguiente forma: el primero de la lista en el lugar del 1, el segundo en el lugar del 2, el tercero en el lugar del 3 y así sucesivamente hasta que completes el nuevo cuadrado.

El cuadrado que queda también es mágico.

Expresiones algebraicas y modelos geométricos

Valor numérico de una expresión algebraica: es el número que se obtiene al sustituir las literales de la expresión por determinados números y hacer las operaciones indicadas.

Ejemplo: $5\ x^4 + 4\ x^2 - 6\ x + 4$ Para $x = 2$
Vamos a sustituir las x por el número 2 que es el indicado en este ejercicio.

$(5)\ 2^4 + (4)\ 2^2 – (6)\ 2 + 4 = (5)\ 16 + (4)\ 4 – (6)\ 2 + 4 = 80 + 16 – 12 + 4 = 100 – 12 = 88$

Ejercicios:
1. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $5\ x^4 – 3\ x^3 + 8\ x – 9$ para $x = 2$

b) $3\ x^5 - 4\ x^4 – 2\ x^2 + 6$ para $x = -1$

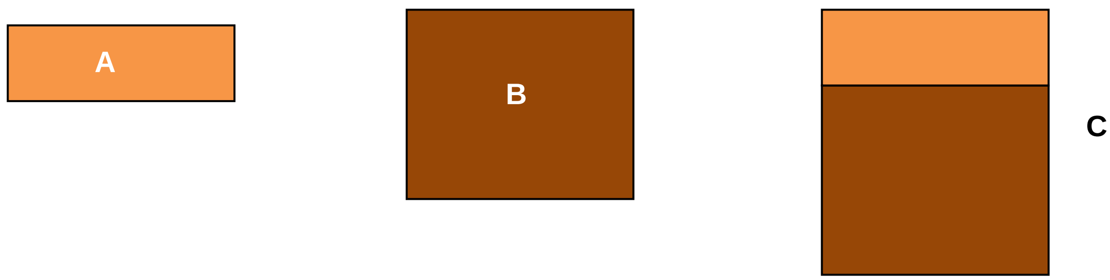
c) $2\ x^4 – 3\ x^3 + 8\ x – 5$ para $x = 3$

d) $x^4 – 2\ x^2 + 5\ x + 1$ para $x = 5$

e) $2\ x^3 – 6\ x^2 + 5\ x + 4$ para $x = - 2$

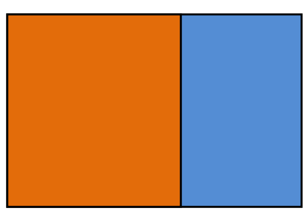
f) $3\ x^2 + 5\ x – 6$ para $x = - 5$

2.- Si pegamos dos rectángulos como A y B de manera que se forme otro rectángulo C ¿cuál es la expresión algebraica que representa el rectángulo C?



3.- Calcula el perímetro, el área, y el apotema de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

4. El señor González tiene un terreno de 21.5 m de frente. En su testamento, él establece que el terreno se repartirá en dos partes, una para su esposa y otra para su hijo. Si la parte del hijo tendrá 12.3 m de frente, ¿cuál será una expresión para el área del terreno de la esposa?



Forma, espacio y medida.

Formas geométricas.

Ángulos.

En esta lección aprenderás a resolver problemas que impliquen reconocer, estimar y medir ángulos utilizando el grado como unidad de medida.

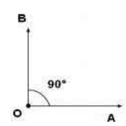
Ángulo: es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen, llamado vértice. Las semirrectas se llaman lados.

El sistema básico para la medición de ángulos es el denominado sexagesimal, que se caracteriza por ser un sistema posicional de base sesenta. La unidad de este sistema de medición es el **grado.**

El ángulo, cuya medida es un grado, se obtiene dividiendo a la circunferencia en 360 partes, consiguiéndose así un arco de un grado al que le corresponde un ángulo que mide un grado. Por tal motivo se puede hablar indistintamente de arco de un grado o ángulo de un grado.

Las divisiones sucesivas del grado en sesenta partes, dan lugar al minuto y dividiendo así mismo a éste en sesenta partes al segundo. Es por esto que la medida de un ángulo puede darse en grados, minutos y segundos. Ejemplo A = 30 29 14 (treinta grados, veintinueve minutos, catorce segundos.

1. Completa esta tabla de clasificación de ángulos:

Nombre	Definición	Figura
Ángulo recto	Mide 90°	
Ángulo agudo	Mide menos de 90°	
Ángulo obtuso	Mide más de 90°	
Ángulo extendido, llano o colineal	Mide 180°	
Ángulo completo (perígono)	Mide 360°	

2. Ejemplifica las siguientes definiciones, en los espacios de debajo de cada enunciado.

a) **Ángulo entrante**. El que es mayor de dos rectos pero menor que cuatro rectos (mayor de 180º y menor de 360º).

b) **Ángulos adyacentes**. Aquellos que tienen un mismo vértice y un lado común.

c) **Ángulos oblicuos**. Son ángulos desiguales que se forman cuando se cortan dos rectas. Pueden ser agudos (si son menores que un recto) u obtusos (si son mayores que un recto).

d) **Ángulos complementarios**. Aquellos en donde su suma es un recto, es decir, la suma de los dos ángulos debe ser igual a 90º.

e) **Ángulos suplementarios**. Aquellos en donde su suma es dos rectos, es decir, la suma de los dos ángulos debe ser igual a 180º.

Ángulos entre paralelas.

Al intersectar una paralela por una recta llamada transversal o secante, se forman los siguientes tipos de ángulo:

Ángulos correspondientes: Son los que están al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal.

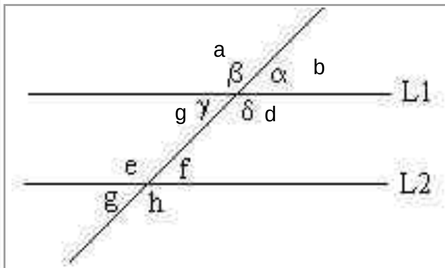
Ángulos alternos internos: Son los que están entre las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal.

Ángulos alternos externos: Son los que "fuera" de las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal.

Las propiedades fundamentales de los ángulos entre paralelas son:
a. Los ángulos correspondientes son iguales entre sí.
b. Los ángulos alternos internos son iguales entre sí.
c. Los ángulos alternos externos son iguales entre sí.

Ángulos entre paralelas.

3. Llena las celdas de las propiedades con los ángulos convenientes:

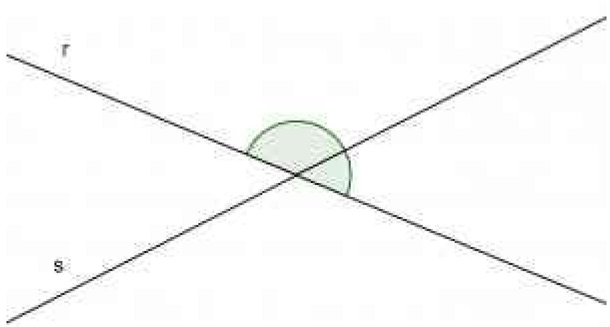


	L1 / / L2

Propiedades que se obtienen son:	
	Ángulos correspondientes
	Ángulos alternos internos
	Ángulos alternos externos
	Ángulos opuestos por el vértice

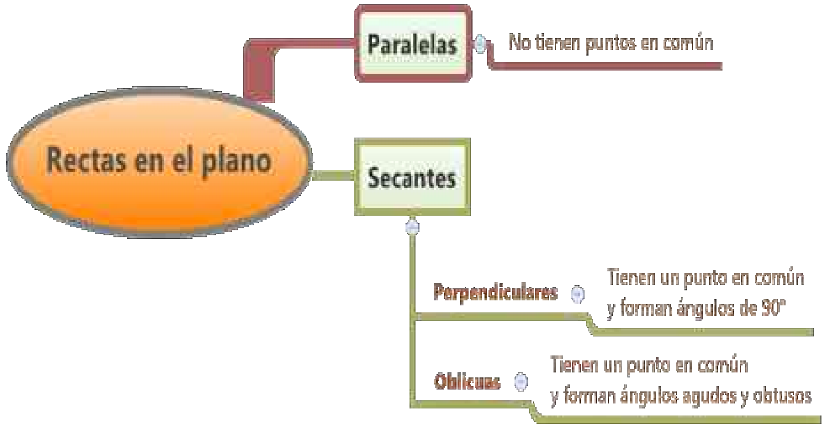
Si dos rectas tienen un punto en común se llaman secantes.
Las rectas secantes se clasifican en oblicuas y perpendiculares.

Rectas Oblicuas
Si dos rectas tienen un punto de intersección, y forman ángulos no todos iguales, las rectas se llaman ***oblicuas***.

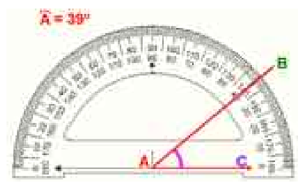


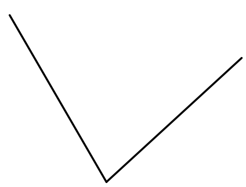
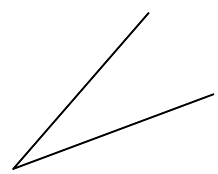
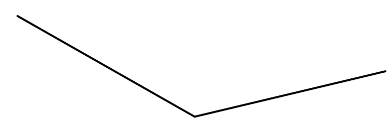
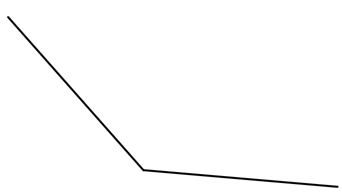
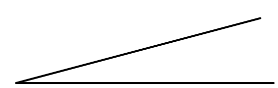
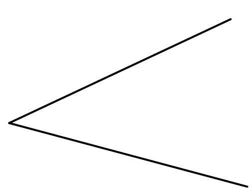
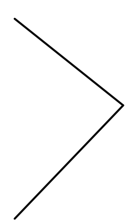
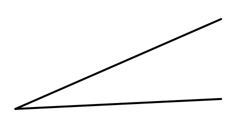
4. Señala los ángulos que sean suplementarios en el dibujo anterior.

Rectas Perpendiculares
Si dos rectas tienen un punto de intersección, y forman cuatro ángulos iguales, las rectas se llaman ***perpendiculares*** y los ángulos se llaman ***rectos***.

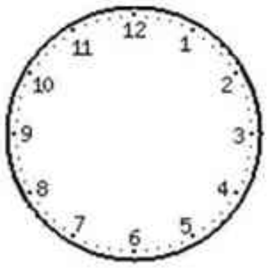
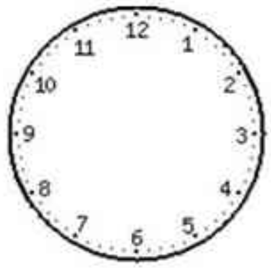
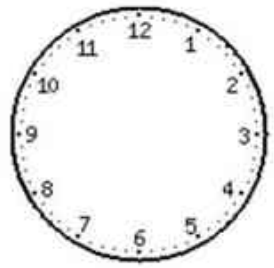


5. Con la ayuda de un transportador mide cada uno de los siguientes ángulos y asígnales nomenclatura:



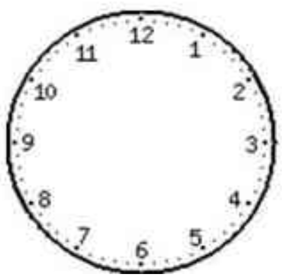
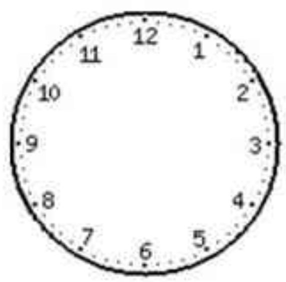
		
Medida:	Medida:	Medida:
		
Medida:	Medida:	Medida:
		
Medida:	Medida:	Medida:

6. En los siguientes relojes marca un ángulo de a) 150 b) 60 c) 120
En la línea escribe la hora que marca el reloj una vez trazados estos ángulos.

______________ ______________ ______________

7. Marca en los siguientes relojes las siguientes a) 3:00 b) 8:00
En la línea escribe el ángulo que se forma una trazada la hora que se pide.

______________ ______________

Como seguramente sabes, también para la medición del tiempo se hace uso del sistema sexagesimal: una hora tiene 60 minutos y un minuto 60 segundos, por ello la técnica para sumar o restar ángulos es análoga a la de sumar o restar horas.

Supongamos que son las 3:40 horas exactas y mi despertador suena a las 4:30 horas con 20 segundos. La pregunta es ¿Cuánto tiempo falta para que suene el despertador?

Sólo tenemos que hacer una resta:

  4h 30 min 20s
_ 3h 40 min 0 s
____

Como tenemos que restar por separado los segundos los minutos y las horas, no podemos restar 40 minutos a 30 minutos, entonces convertimos una hora en minutos y la colocamos en la columna de los minutos, quedàndonos:

  3h 90 min 20s
_ 3h 40min 0s
____
  0h 50min 20s

8.- Construye sin transportador ángulos de:

a) 60

b) 45

c) 30

d) 22 30

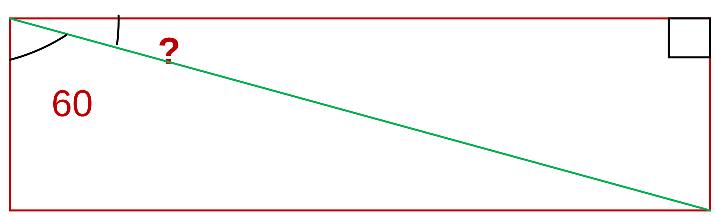
9.Señala cuáles son obtusos, agudos, rectos y llanos.

a) ¿Cuántos grados gira la manecilla de las horas en 30 minutos?

b) ¿Cuántos grados gira el minutero después de 12 minutos?

c) ¿Cuántos grados ha girado el segundero después de 38 segundos?

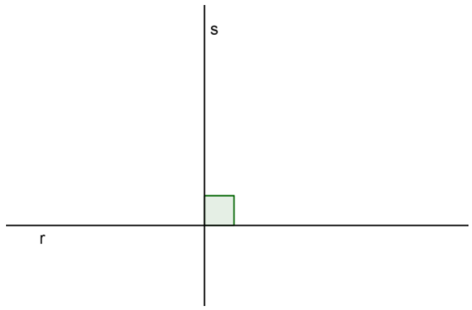
10.- Observa la siguiente figura y obtén la medida del ángulo que se desconoce:



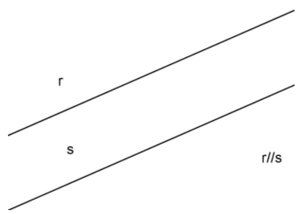
Rectas y ángulos

Aquí aprenderás a determinar mediante construcciones las posiciones relativas de dos rectas en el plano y elaborar definiciones de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. Además aprenderás a establecer relaciones entre los ángulos que se forman al cortarse dos rectas en el plano, reconocer ángulos opuestos por el vértice y adyacentes.

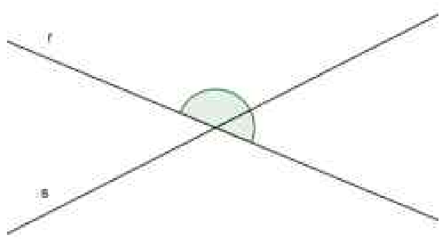
Las líneas perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares si y solamente si se intersecan, formando un ángulo recto.



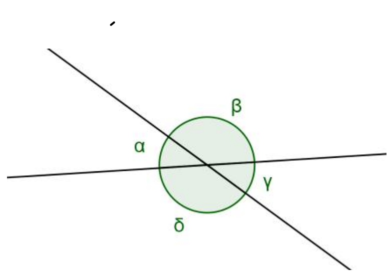
Líneas paralelas: dos rectas son paralelas si y solamente si yacen en el mismo plano y no se interponen.



Líneas oblicuas: dos rectas son oblicuas siempre que no sean paralelas ni perpendiculares.



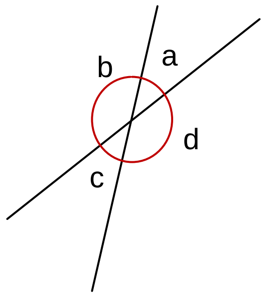
Ángulos opuestos por el vértice: Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados de uno son las prolongaciones del otro.



Los ángulos son opuestos por el vértice y también lo son los ángulos

Responde las siguientes preguntas:

1.- Si en la siguiente figura el ángulo a mide 40 , ¿Cuál será el valor de cada uno de los ángulos b, c y d?



2.- Calcula el ángulo complementario de:

a) 30 b) 18 50 15 c) 33 33

3.- Calcula el ángulo suplementario de:

a) 25 b) 56 10 50 c) 27 18 17

4.- ¿Cuánto mide el ángulo que es?

a) Igual a su complemento

b) El doble de su suplemento

c) La mitad de su complemento

d) El 25% de su complemento

5.- Si el ángulo a es adyacente al ángulo b, y el ángulo b es adyacente al ángulo c, entonces ¿a y c son complementarios? Justifica tu respuesta

Ángulos entre paralelas

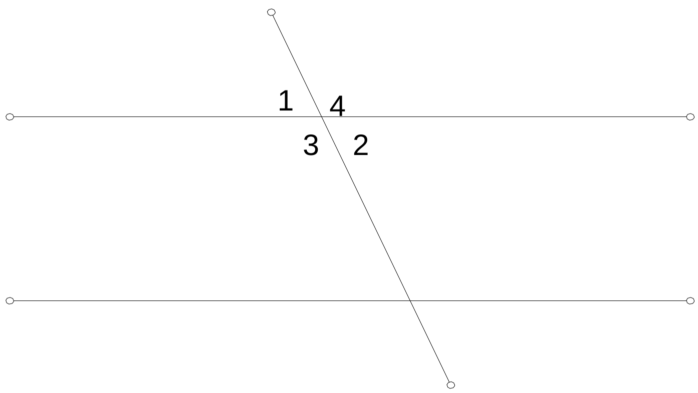
Líneas paralelas. Se llaman líneas paralelas las que se hallan en un mismo plano y no se intersectan por mas que se prolonguen.

Si una línea corta a un par de paralelas (l y m) entonces forma ángulos con éstas, los cuales mantienen la siguiente relación:

1 = 2 y se llaman ángulos opuestos por el vértice

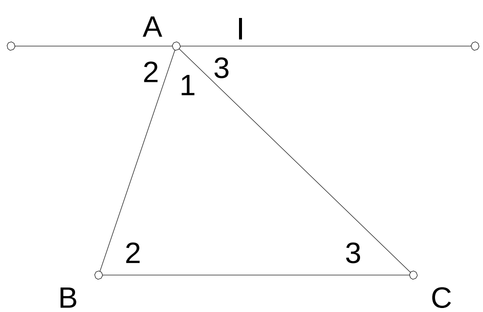
1 = 3 y se llaman ángulos alternos internos

1 = 4 y se llaman ángulos correspondientes



Se manifiesta que 4 + 1 = 180° y se dice que 4 y 1 son suplementarios.
Dadas estas afirmaciones, estamos en condiciones de probar lo siguiente:

a) La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

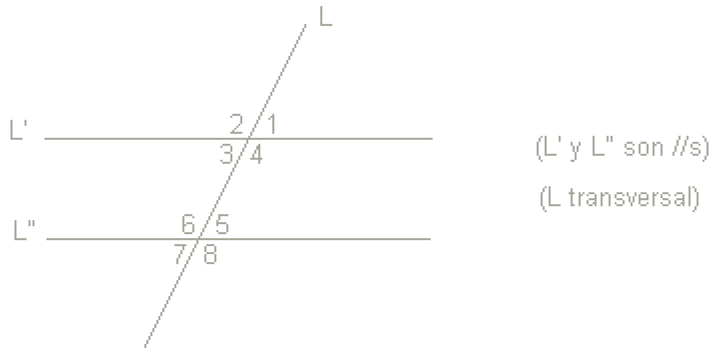


1. Justifica el enunciado a).

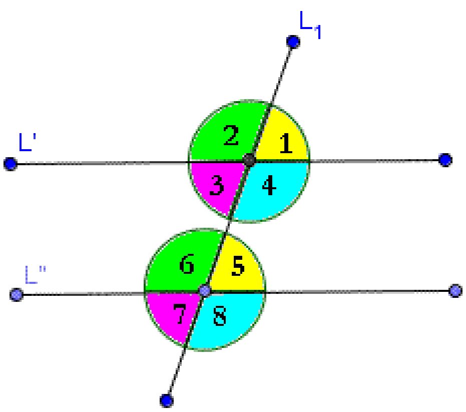
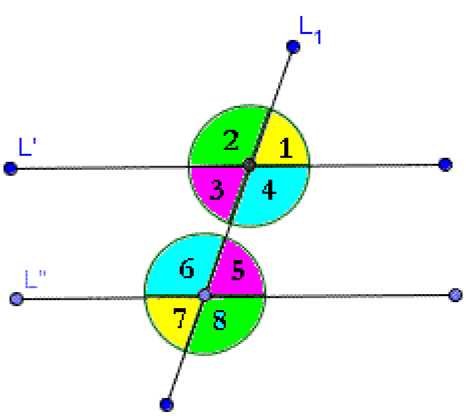
2. Rellena las celdas con las figuras de los ángulos indicados:

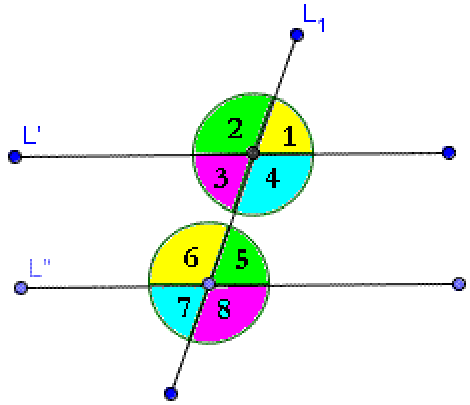
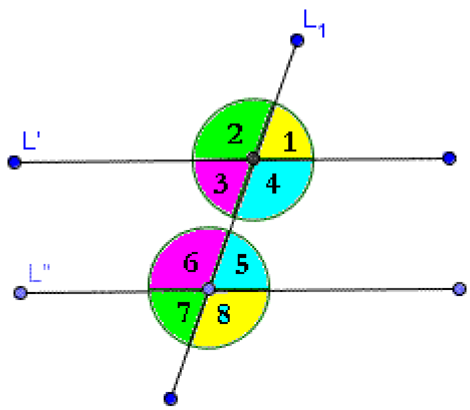
PAREJA DE ÁNGULOS		
Ángulos adyacentes	Son ángulos que tienen un lado común y los otros dos pertenecen a la misma recta.	
Ángulos consecutivos	Son ángulos que tienen un lado común y el mismo vértice. <BAC es adyacente con <DAC	
Ángulos opuestos por el vértice	- Dos líneas que se intersectan generan ángulos opuestos por el vértice. - Son ángulos no adyacentes. <1, <2, <3 y <4 - Son ángulos congruentes: <1 = <2 y <3 = <4	
Ángulos complementarios	- Es un tipo especial de ángulo adyacente cuya particularidad es que suman 90°. $\alpha + \beta = 90°$ El <BAC es adyacente al <DAC y viceversa.	
Ángulos suplementarios	- Es un tipo especial de ángulo adyacente cuya particularidad es que suman 180°. $\alpha + \beta = 180°$ El <BAC es adyacente al <DAC y viceversa.	

Ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal.

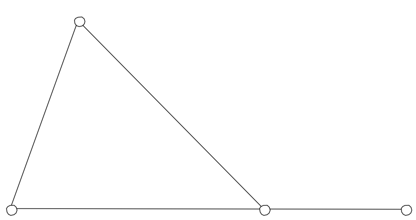


3. Indica las igualdades y relaciones de los tipos de ángulos en las celdas convenientes:

Tipos de ángulos formados	
Ángulos correspondientes entre paralelas. 	
Ángulos alternos entre paralelas. 	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Son suplementarios</td>
<td>Ángulos contrarios o conjugados.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Ángulos colaterales.

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

4.- Encontrar cuánto vale el ángulo exterior θ en la siguiente figura, si son conocidos los ángulos α y β:



5.- Encontrar cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados.

Manejo de la Información

Análisis de la Información

Proporcionalidad directa

Para comprender el concepto de proporcionalidad, directa o inversa, debemos comenzar por comprender el concepto de **razón**.

Razón y proporción numérica entre 2 números

Siempre que hablemos de **Razón** entre dos números nos estaremos refiriendo al cociente (el resultado de dividirlos) entre ellos.
Entonces:

Razón entre dos números **a** y **b** es el cociente entre	$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$

Por ejemplo, la razón entre 10 y 2 es 5, ya que	$\frac{10}{2} = 5$

Y la razón entre los números 0,15 y 0,3 es	$\frac{0{,}15}{0{,}3} = \frac{1}{2}$

Proporción numérica

Ahora, cuando se nos presentan **dos razones** para ser comparadas entre sí, para ver cómo se comportan entre ellas, estaremos hablando de una **proporción numérica.**

Entonces:

Los números **a, b, c** y **d** forman una **proporción** si la razón entre **a** y **b** es la misma que entre **c** y **d**.	
Es decir	$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$
Se lee "**a** es a **b** como **c** es a **d"**	

Los números 2, 5 y 8, 20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20.

Es decir	$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

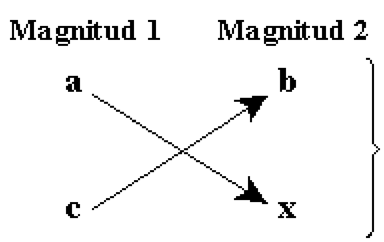
En la proporción	$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$	Hay cuatro términos; **a** y **d** se llaman **extremos**, **c** y **b** se llaman **medios.**

La propiedad fundamental de las proporciones es: **en toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios.**

Así, en la proporción anterior	$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

Se cumple que el producto de los extremos nos da 2 x 20 = 40 y el producto de los medios nos da 5 x 8 = 40

En general $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$



$$a \cdot x = b \cdot c \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Comprendido el concepto de proporción como una relación entre números o magnitudes, ahora veremos que esa relación puede darse en dos sentidos:
Las dos magnitudes pueden subir o bajar (aumentar o disminuir) o bien si una de las magnitudes sube la otra bajo y viceversa.

Si ocurre, como en el primer caso, que las dos magnitudes que se comparan o relacionan pueden subir o bajar en igual cantidad, hablaremos de Magnitudes directamente proporcionales.

Si ocurre como en el segundo caso, en que si una magnitud sube la otra baja en la misma cantidad, hablaremos de Magnitudes inversamente proporcionales.

Magnitudes directamente proporcionales

Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde **doble, triple...** cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **directamente proporcionales**.

Ejemplo

Un saco de papas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesan 2 sacos?
Un cargamento de papas pesa 520 kg ¿Cuántos sacos de 20 kg se podrán hacer?

Número de sacos	1	2	3	...	26	...
Peso en kg	20	40	60	...	520	...

Para pasar de la 1ª fila a la 2ª basta multiplicar por 20
Para pasar de la 2ª fila a la 1ª dividimos por 20

Observa que	$\frac{1}{20} = \frac{2}{40} = \frac{3}{60} = ...$

Las magnitudes **número de sacos** y **peso en kg** son **directamente proporcionales**.
La **constante de proporcionalidad** para pasar de número de sacos a kg es 20.
Esta manera de funcionar de las proporciones nos permite adentrarnos en lo que llamaremos Regla de tres y que nos servirá para resolver una gran cantidad de problemas matemáticos.

Regla de tres simple directa

Ejemplo 1
En 50 litros de agua de mar hay 1 300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5 200 gramos de sal?

Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple, triple, etc. Las magnitudes **cantidad de agua** y **cantidad de sal** son **directamente proporcionales**.
Si representamos por x el número de litros que contendrá 5 200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

Litros de agua	50	x
Gramos de sal	1 300	5 200

Se verifica la proporción:	$\_\_\_\_\_ \quad \_\_\_\_\_$

Y como **en toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos** (en palabras simples, se multiplican los números en forma cruzada) resulta:
50 por 5 200 = 1 300 por **x**

Es decir	$\frac{(\quad (}{\quad}$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } 50\,l \text{ hay } 1300\,g \text{ de sal} \\ \text{En } x\,l \text{ habrá } 5200\,g \text{ de sal} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 50\,l \,\_\_\_\_\, 1300\,g \\ x\,l \,\_\_\_\_\, 5200\,g \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \frac{(\quad (}{\qquad}$$

Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de **regla de tres simple directa**.

Ejemplo 2

Un automóvil gasta 5 litros de bencina cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

$$\left.\begin{array}{l} 5\,l \,\_\_\_\_\_\, 100\,km \\ 6\,l \,\_\_\_\_\_\, x \;\; km \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \frac{(\quad (}{\qquad}$$

Luego, con 6 litros el automóvil recorrerá 120 km

Magnitudes inversamente proporcionales

Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde la **mitad**, la **tercera parte**... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **inversamente proporcionales.**

Ejemplo

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte, etc. Por tanto, las **magnitudes** son **inversamente proporcionales (también se dice que son indirectamente proporcionales)**.

Formamos la tabla:

Hombres	3	6	9	...	18
Días	24	12	8	...	?

Vemos que los productos 3 por 24 = 6 por 12 = 9 por 8 = 72

Por tanto 18 por x = 72

O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo

Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es 72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

Importante:
Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes inversamente proporcionales se obtiene multiplicando las magnitudes entre sí, y el resultado se mantendrá constante.

Regla de tres simple inversa (o indirecta)

Ejemplo 1

Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?

Vemos que con el mismo forraje, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de días; a triple número de vacas, tercera parte de días, etc. Por tanto, son magnitudes **inversamente proporcionales**.

X = número de días para el que tendrán comida las 450 vacas

Nº de vacas	220	450
Nº de días	45	x

Se cumple que: 220 por 45 = 450 por x, de donde	((

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} 220\ vacas\ tienen\ para\ 45\ días \\ 450\ vacas\ tienen\ para\ x\ \ días \end{array}\right\} \begin{array}{l} 220 vacas \_\_\_\_ 45 días \\ 450 vacas \_\_\_\_\_ x\ días \end{array}\Bigg\} \Rightarrow$$

((

Luego 450 vacas podrán comer 22 días

> Esta forma de plantear y resolver problemas sobre proporciones se conoce con el nombre de **regla de tres simple inversa**.

Ejemplo 2

Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

$$\left.\begin{array}{l} 8\ toneles \_\_\_\_\_ 200\ litros \\ 32\ toneles \_\_\_\_ x\ litros \end{array}\right\}$$

((

Pues la cantidad de vino = 8 por 200 = 32 por x

Debemos tener 32 toneles de 50 litros de capacidad para poder envasar la misma cantidad de vino.

Proporcionalidad compuesta de magnitudes

Regla de tres compuesta. Método de reducción a la unidad

Ejemplo 1: Proporcionalidad directa

Cuatro chicos durante 10 días de campamento han gastado en comer 25 000 pesos. En las mismas condiciones ¿cuánto gastarán en comer 6 chicos durante 15 días de campamento?

Doble número de chicos acampados el **mismo número de días** gastarán el doble. Luego las magnitudes número de chicos y dinero gastado son **directamente proporcionales**.

El **mismo número de chicos**, si acampan el doble número de días gastarán el doble. Luego las magnitudes número de días de acampada y dinero gastado son **directamente proporcionales**.

Hemos relacionado las dos magnitudes conocidas, número de chicos y número de días con la cantidad desconocida, gasto.

Sabemos que	$4\ chicos \xrightarrow{en} 10\ días \xrightarrow{gastan} 25000$	**pesos**
Reducción a la unidad	$1\ chico \xrightarrow{en} 10\ días \xrightarrow{gasta} \frac{25000}{4} = 6250$.	pesos
	$1\ chico \xrightarrow{en} 1\ día \xrightarrow{gasta} \frac{6250}{10} = 625$.	pesos
	$6\ chicos \xrightarrow{en} 1\ día \xrightarrow{gastan} 625.6 = 3750$.	pesos
Búsqueda del resultado	$6\ chicos \xrightarrow{en} 15\ días \xrightarrow{gastan} 3750.15 = 56250$.	pesos

Ejemplo 2: Proporcionalidad inversa

15 obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?

Doble número de obreros trabajando el mismo número de días trabajarán la mitad de horas al día para realizar el trabajo. Por tanto el número de obreros y el número de días de trabajo son inversamente proporcionales.

Doble número de horas diarias de trabajo el mismo número de obreros tardarán la mitad de días en realizar el trabajo. Luego el número de horas diarias de trabajo y el número de días de trabajo son inversamente proporcionales.

Hemos relacionado las dos magnitudes conocidas, número de obreros y número de horas diarias de trabajo, con la cantidad desconocida, número de días de trabajo.

Sabemos que	$15\ obreros \xrightarrow{trabajando} 6\ horas\ diarias \xrightarrow{tardan} 30\ días$
Reducción a la unidad	$1\ obrero \xrightarrow{trabajando} 6\ horas\ diarias \xrightarrow{tarda} 30.15 = 450\ días$
	$1\ obrero \xrightarrow{trabajando} 1\ hora\ diaria \xrightarrow{tarda} 450.6 = 2700\ días$
Búsqueda del resultado	$10\ obreros \xrightarrow{trabajando} 1\ hora\ diaria \xrightarrow{tardan} \frac{2700}{10} = 270\ días$
	$10\ obreros \xrightarrow{trabajando} 8\ horas\ diarias \xrightarrow{tardan} \frac{270}{8} = 33.75\ días$

Por tanto, 10 obreros empleando 8 horas diarias tardarán 33,75 días.

Ejercicios Propuestos.

1. Dos socios constituyen una empresa, inicialmente Juan aporta 30000 pesos y Antonio 420000 pesos. Al cabo de dos años obtienen beneficios que se reparten en proporción al capital aportado inicialmente, si Antonio recibe 49000 pesos ¿Cuánto recibe Juan?

2. Un vehículo que circula a velocidad constante recorre 80 km. en 2 horas. Si se sabe que ha empleado 6 horas en llegar de la ciudad A a la ciudad B ¿Qué distancia separa las ciudades?

3. En un mercado el pescadero vende 6 kg de truchas $ 300. Si tenemos $ 700, ¿cuántos kg de truchas podemos comprar?

4. Un granjero tiene 14 vacas que comen 940 kilos de alfalfa al día, si tuviese 77 vacas ¿Cuántos kg de alfalfa consumirían en un día?

5. La siguiente imagen se obtuvo al reducir un mapa del Distrito Federal, La condición que nos dieron fue que por cada 5 centímetros del mapa original la imagen tendría un centímetro.

¿Qué escala usamos en la reducción?

¿Qué factor proporcional te daría las dimensiones de la imagen?

Usa el factor inverso para calcular las dimensiones del mapa original.

Proporcionalidad Múltiple

La proporcionalidad directa es un caso particular de las variaciones lineales. El factor constante de proporcionalidad puede utilizarse para expresar la relación entre cantidades.
Ley de las proporciones múltiples

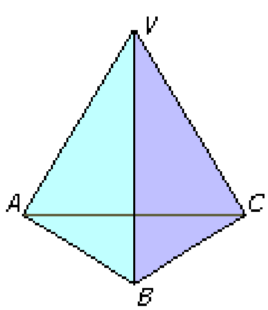
La ley de Dalton o ley de las proporciones múltiples formulada en 1803 por John Dalton, es una de las leyes estequiométricas más básicas. Fue demostrada por el químico y físico francés Joseph Gay-Lussac.

Esta ley afirma que cuando dos elementos se combinan para originar diferentes compuestos, dada una cantidad fija de uno de ellos, las diferentes cantidades del otro se combinan con dicha cantidad fija para dar como producto los compuestos, están en relación de números enteros sencillos.

Es decir, que cuando dos elementos A y B forman más de un compuesto, las cantidades de A que se combinan en estos compuestos, con una cantidad fija de B, están en relación de números enteros sencillos.

Esta fue la última de las leyes ponderales en postularse. Dalton trabajó en un fenómeno del que Proust no se había percatado, y es el hecho de que existen algunos elementos que pueden relacionarse entre sí en distintas proporciones para formar distintos compuestos.

1.-Observa la pirámide que aparece en el cuadro. La fórmula para calcular su volumen es:



Esto es, − del área de la base por la altura de la pirámide.

b= base del triángulo.

a= altura del triangulo.

h= altura de la pirámide.

1. Completa la tabla con las cantidades faltantes. Recuerda que la primera pirámide será la referencia para las siguientes.

Nota: f es el factor proporcional al que aumentan o disminuyen las dimensiones y el volumen de la pirámide.

a)

Pirámide 1			
b	a	h	V
2 cm	3 cm	5 cm	

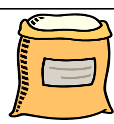
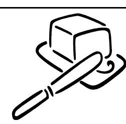
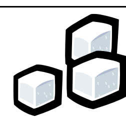
b)

Pirámide 2							
f	b	f	a	f	h	f	V
2		2		2			

2. En una casa de estudiantes el gasto mensual es de 20 000 pesos, alojando a 20 estudiantes. Responde en tu cuaderno, ¿cuánto gastaría durante 35 días alojando a 45 estudiantes, viviendo en iguales condiciones? Considera que el mes tiene 30 días.

3. La mamá de Sonia tiene la receta de un pastel que rinde para 4 personas. La lista de ingredientes dice que se necesitan 200 gramos de harina 150 gramos de mantequilla y 120 gramos de azúcar.

Sonia ha invitado a sus amigos a festejar su cumpleaños, pero aún no sabe si todos asistirán. Ayúdale a la mamá de Sonia a llenar la tabla con la cantidad de ingredientes que se necesitarían para el número de personas que se indican.

Número de personas				**Mezcla gramos**
4	200 gramos	150 gramos	120 gramos	470 gramos
6				
8				

La cantidad en cada ingrediente aumenta de forma proporcional. ¿Puede decirse lo mismo de la mezcla? Discute la respuesta con tus compañeros y da tu respuesta con tu profesor.

Representación de la Información.

Problemas de conteo

Los chistes son formas divertidas de comunicación. A veces se utilizan para exaltar virtudes o defectos, o para dar a las historias una cierta comicidad. El chiste que aparece a continuación sirve para diseñar diagramas de árbol y organizarla información.

Ejercicio.

1. Ana tiene que elegir un taller y un deporte en el colegio. Los talleres son costura, dibujo y mecanografía, mientras que los deportes son basquetbol, futbol y volibol. ¿Cuántas posibilidades tiene Ana de elegir un taller y un deporte? Justifica tu respuesta.

2. ¿De cuántas formas se pueden agrupar A y B, dos elementos distintos sin repetirlos? ¿De cuántas formas se pueden agrupar sin repetir tres elementos distintos, digamos A, B Y C?
¿De cuántas formas se pueden agrupar, sin repetir, cuatro elementos distintos? ¿Cuántas con diez?

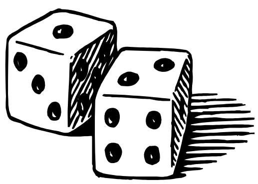
3.Un restaurante ofrece tres tipos de guisado, dos de sopa y cuatro de postre. Un menú económico consiste de dos platillos: un guisado y una sopa, o bien un guisado y un postre. Supongamos que llamas a los guisados A, B y C; a las sopas como D y E; y a los postres como F, G, H. Un ejemplo de menú económico sería tomar A y D; otro ejemplo sería tomar A y F. ¿Cuántas combinaciones puede tener para formar tu propio menú económico?

Polígonos de frecuencias.

En esta sección aprenderás a interpretar y comunicar información mediante polígonos de frecuencia.

Para obtener un polígono de frecuencia, necesitamos haber construido una tabla de frecuencias. Como a veces se cuentan muchos datos, una manera cuando los datos se encuentran agrupados en intervalos de clase, se construye la grafica de barras. Luego se toman los puntos medios, sobre la parte superior de cada barra, y se unen los segmentos de recta teniendo así el polígono de frecuencias.

Ejercita el conocimiento de una manera sencilla.



Número	Frecuencia
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1. Toma un dado, tíralo treinta veces y ve registrando cuántas veces te sale 1, 2, 3……hasta 6.
Calcula la frecuencia absoluta y relativa con la que cayó cada cara del dado en los lanzamientos.
Representa los resultados anteriores mediante un polígono de frecuencias.

2.- Los datos que se muestran en la tabla representan el número de pasajeros que transportó la organización de taxistas “Los avioncitos” (por la velocidad con la que conducen) durante una semana.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Pasajeros	828	932	865	990	1200	895	535

Representa estos datos en una grafica poligonal.

3. Describe cómo varía (aumenta o disminuye) el número de pasajeros cada día de la semana.
¿Qué factores consideras significativos para que alguien elija usar o no los taxis “Los avioncitos”?

Autoevaluación Bloque 1.

Lee detenidamente cada situación, y en cada una de ellas tendrás 4 opciones. Realiza las operaciones en una hoja. Subraya con rojo la opción que creas correcta.

1.- José compra 12 refrescos, 4 bolsas de platos y 3 de vasos desechables. Si cada refresco cuesta 14 pesos, la bolsa de platos 15 y la de 8, ¿cuánto debe pagar José por la compra?
a) \$197 b) \$245 c) \$252 d) \$260

2.- ¿Cuál es el resultado de la operación 2^{-4}?

a) -8 b) -16 c) -– d) —

3.- ¿Cuál es el resultado de 0.03 ÷ 1.5?
a) 0.02 b) 0.2 c) 50 d) 0.5

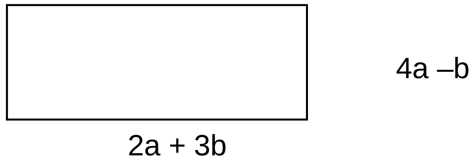
4.- ¿Qué opción muestra la expresión obtenida al simplificar 5x+3y+4x-5y+6x+6y+6+12-8-12y?

a)15x +8y + 10
b)15x -8y-10
c)15x-8y+10
d) 15x +8y – 2

5.- ¿Cuál de las opciones muestra la ecuación que resuelve el problema?: Juan tiene una bolsa con canicas, si uno de sus amigos le regala la misma cantidad de canicas que tenía en la bolsa y pierde 4 canicas en un juego, ¿cuántas canicas tenía en la bolsa si al finalizar el día tiene 20 canicas?

a) x + 4 = 20
b) 2x -4 = 20
c) 2x + 4 = 20
d) 2(x – 4) = 20

6.- ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

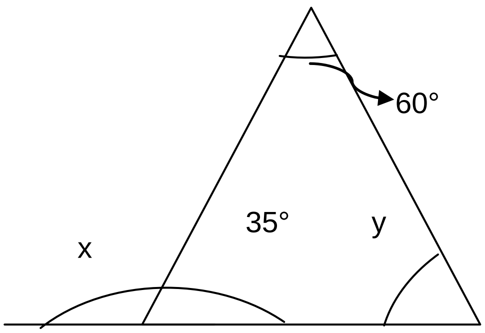


a) 112a + 4b
b) 12a +8b
c) 12a -8b
d) 12a -4b

7.- ¿Cuánto mide cada ángulo interno de un pentágono regular?

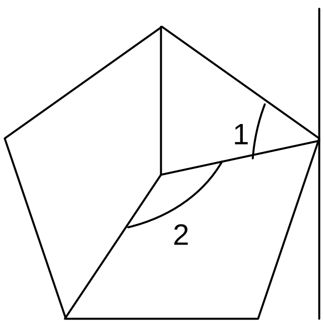
a) 36°
b) 72°
c) 108°
d) 144°

8.- Observa la figura y determina el valor de x y y



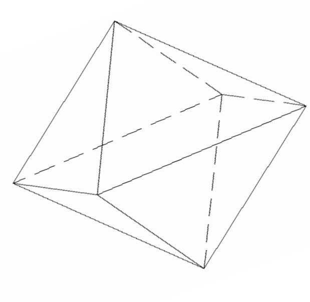
a) 55° y 85°
b) 55° y 145°
c) 55° y 80°
d) 145° y 85°

9.- Observa el polígono regular. De acuerdo con sus datos, ¿cuánto suman los ángulos 1 y 2?



a) 72°
b) 108°
c) 144°
d) 198°

10.- ¿Cuál es el número total de aristas del octaedro?



a) 6 b) 8 c) 12 d) 16

11.- Un prisma rectangular recto mide 35, 40 y 64 centímetros de largo, ancho y altura, ¿cuál es el área de sus caras?

a) 139 cm^2 b) 6200 cm^2 c) 12 400 cm^2 d) 89 600 cm^2

12.- Un automóvil recorre 25 kilómetros con 2 litros de gasolina, ¿cuántos kilómetros puede recorrer con 34 litros?

a) 2.72km b) 4.25 km c) 272km d) 425 km

13.- Un taxi cobra $6.70 al momento de subir pasaje y después cobra $1.20 por cada kilometro recorrido ¿qué expresión representa la relación entre el número de kilómetros recorridos(x) y el costo total (y)?

a) y= 1.20x b) y= x +6.70 c) y= 1.20x + 6.70 d) y= 6.70x

14.- ¿Cuál es el promedio de las calificaciones de Juan?

Matemáticas	8
español	7
Bilogía	10
Química	6
Civismo	7
Física	8
Inglés	10
Educación física	9

a) 9.28 b) 7.22 c) 8.12 d) 8.42

15.- ¿Qué expresión representa la regla general de la sucesión ½, 1/3……?

a) 1/n b) 1/2n c) 1/ n+1 d) 1/2n+1

16.- Una recta tiene por ecuación y = − x -5, ¿cuál es el número en que la recta corta al eje y?

a) 3 b) -5 c) 3/2 d) −

17.- Juan, Mario, Andrea y Carmela se sientan en cuatro sillas, ¿de cuántas formas distintas pueden sentarse?

a) 24 b) 12 c) 8 d) 4

18.- ¿Cuál es el resultado de $(2^3)(2^2)$?

a) 12 b) 24 c) 32 d) 64

Bloque 2.

Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Significado y uso de las operaciones.

La jerarquía de las operaciones.

En este repaso el alumno utilizará la jerarquía de las operaciones y los paréntesis si fuera necesario, en problemas y cálculos.

Para trabajar con cálculos que involucren varias operaciones, hay que respetar cierta prioridad.

Primero se realizan las operaciones dentro de los paréntesis.
Después se efectúan las potencias y raíces.
Luego las multiplicaciones y divisiones.
Por ultimo, se llevan a cabo las sumas y restas.

Ejemplo:

($\frac{(}{\quad}$ —— = 12-1+9 = 20

Cuando no hay paréntesis indicados, normalmente la jerarquización se sigue respetando; primero las potencias o raíces, luego multiplicaciones y divisiones y después sumas y restas.

En los siguientes ejercicios anota tus respuestas en tu cuaderno y compártelas con tus compañeros y profesor.

1. ¿Cuánto es la mitad de dos más dos?

2. De acuerdo con lo que hemos revisado a lo largo de la lección, ¿Es correcta la operación
2 + 3 x 4 = 20? Argumenta su veracidad.

3. Realiza los siguientes cálculos:

a) 5 x (3+5) =

b) 11 – 3 x 2 =

c) 12 x 5   3 x 2=

d) 3^3 x 2 + 5=

e) 4^2 (8 – 3) + 2 (8 +5)=

4. En el siguiente ejercicio completa la siguiente tabla sustituyendo los valores.

	X= -2	X =2	X= 0
2 (x+1) + 7 =			
2x + 1 + 7 =			
[– (–) –]			

5. Resuelve la siguiente operación.

*——   + –

Multiplicación y división de polinomios.

En esta sección el alumno aprenderá a resolver problemas multiplicativos que impliquen el uso de expresiones algebraicas.

Toma en cuenta los siguientes conocimientos.

Multiplicación de un monomio por un polinomio.

a es un monomio .

c + d es un polinomio de dos términos o binomio.

Multiplicar (c + d) a equivale a tomar c + d y sumarla a veces.

Si multiplicamos (x + y) **(**3), el procedimiento es:

$$\underbrace{(x + y) + (x + y) + (x + y)}_{\text{3 veces}} = (x + x + x) + (y + y + y)= 3x + 3y$$

Así. (x + y) (3)= 3(x+y) = 3x + 3y

Multiplicación de un polinomio por un polinomio.

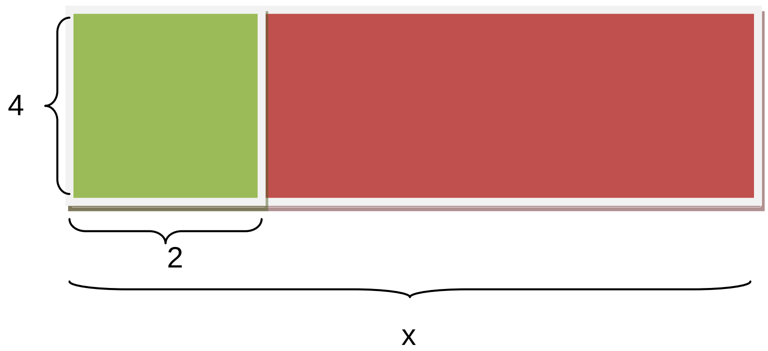
Se multiplican todos los términos del primer factor (multiplicando) por cada uno de los términos del segundo factor (multiplicador). Observa los signos que tiene cada uno de los términos, ya que al multiplicar dos expresiones con signo diferente, el producto es negativo; al multiplicar dos expresiones con el mismo signo, el producto es positivo.

Multiplicar (x – 2) por (x + 1)

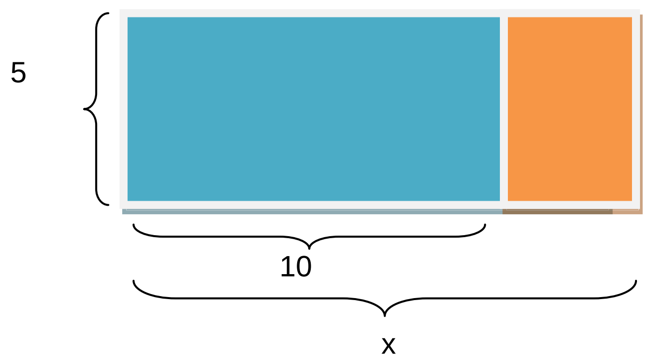
((((((((((

Ejercicios de repaso:

1. Encuentra el área de la región sombreada de las siguientes figuras.



2. Encuentra el área de la siguiente figura.

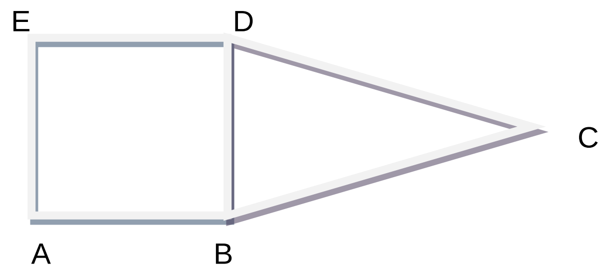


3. Piensa un número y súmale 3. Multiplica el resultado por 2; a éste réstale 2; divide entre 2 la cantidad obtenida; a este resultado súmale 1 por último resta el número que pensaste. ¿El resultado es 3? Encuentra la justificación algebraica.

4. Encuentra un entero positivo a tal que la suma

a + 3a+ 5a+ 7a+ 9a+ 2(a+ 2a+ 3a+ 4a) sea un número con todas sus cifras iguales.
(Sugerencia: piensa cómo se comportan los múltiplos de 5).

5. El cuadrado ABDE y el triangulo isósceles BCD (BC = CD) tiene igual perímetro. Si el polígono ABCDE mide 72 centímetros de perímetro, ¿Cuál es la longitud de CD?



6. Aplicar la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes para encontrar el producto de un monomio por un polinomio:

a.- $3m\ (6m + 5n) =$
b.- $8a\ (5a – 2b) =$
c.- $2y\ (3y – z) =$
d.- $5m^2\ (4m – 3) =$
e.- $6x^3\ (3x – 1) =$
f.- $2xy^2\ (8x + 9y) =$
g.- $11a^2b\ (4^a – 3b) =$
h.- $5xy^3\ (8x + y) =$
i.- $6a^2b^3\ (4^a – 3b) =$
j.- $8m^3n^2\ (4m^2 – 5n) =$
k.- $3x^2y\ (8x – 1) =$
l.- $4ab^2\ (1 + a) =$
m.- $8mn\ (3m – 1) =$
n.- $7x^3y\ (1 – xy) =$
ñ.- $5\ a^2b^2\ (1 + ab) =$

7. Ejercicios de multiplicación de un polinomio por un polinomio.

a) Simplifica: $(5x + 4)\ (-2x)$

b) Simplifica: $x^3\ (2x^2 - 3x + 2)$

c) Simplifica: $(2b^3 - b + 1)\ (b+3)$

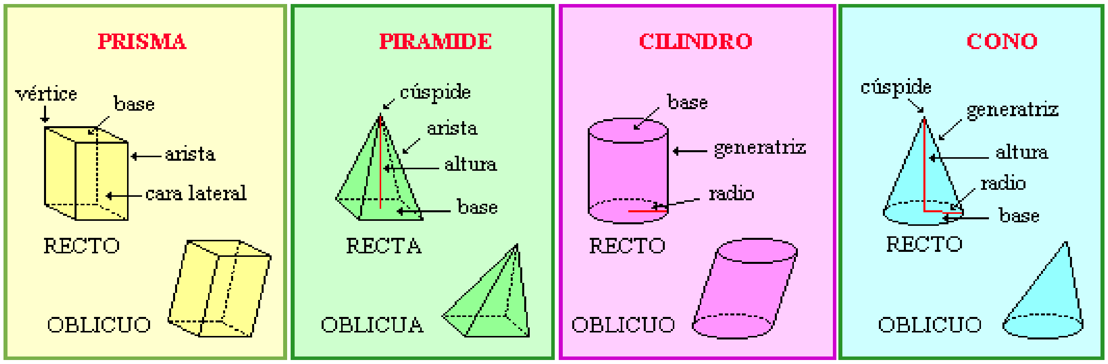
d) Simplifica: $(x^2 - 1)\ (x + 3)$

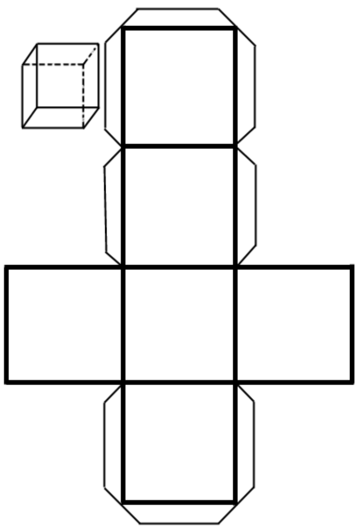
Forma, espacio y medida.

Formas geométricas.

Cubos, prismas y pirámides.

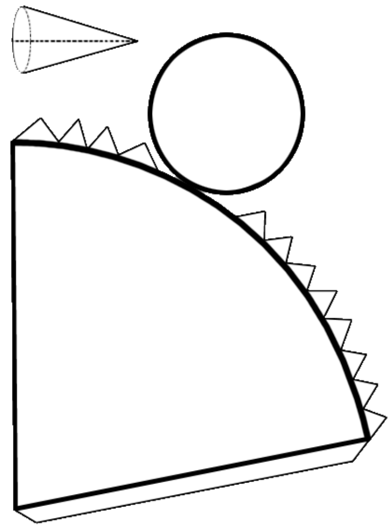
En este tema se desarrollará la imaginación para construir desarrollos de planos de cubos, prismas y pirámides rectos así como a anticipar diferentes vistas de un cuerpo geométrico.

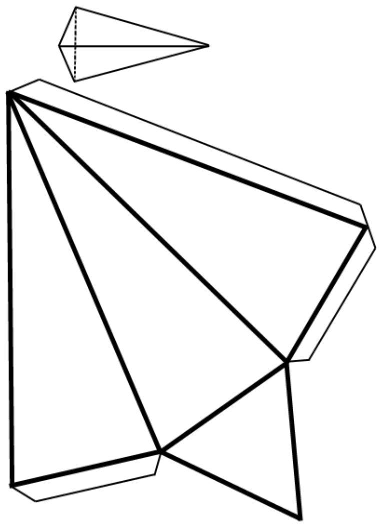




Cubo:
1.- Se trazan cuatro (4) cuadrados iguales, uno seguido del otro.
2.- Luego se dibujan dos (2) cuadrados más a cada lado de uno de los que hiciste anteriormente.
3.- Recuerda que se deben trazar sus respectivas pestañas para así lograr pegar todo el cuerpo geométrico y formar la figura.
Nota: La longitud de los cuadrados debe ser de igual medida en todos los cuadrados.

Cono:
1.- Se traza un círculo que será la base. 2.- Luego se dibuja un triángulo cuya base debe ser en forma de arco. 3.- Las pestañas debes hacerlas en la base del triángulo.





Pirámide Triangular:
1.- Se trazan tres (3) triángulos iguales, uno a continuación del otro.
2.- Luego se dibuja otro triángulo más pequeño, que servirá como base debajo de alguno de los trazados anteriormente.
3.- Recuerda dibujar las pestañas.

1. Responde a las siguientes preguntas
a) ¿Cuántas caras tiene un prisma de base pentagonal?

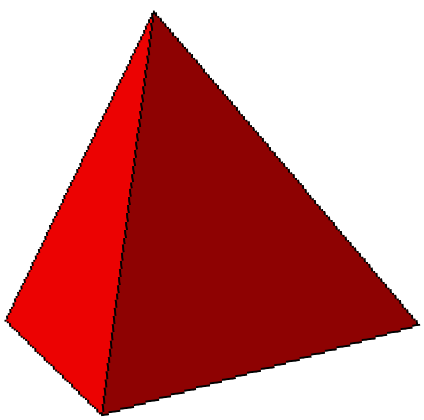
b) ¿Cuántas aristas tiene una pirámide de base cuadrangular?

c) ¿Puedes construir paralelepípedos con más (o menos) de seis caras?

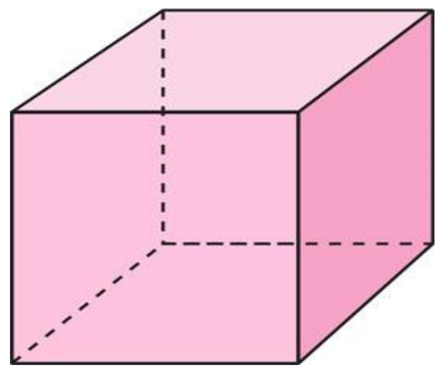
d) ¿Cuál es el área total de la superficie de un cubo de lado igual a 5 centímetros?

2. Completa la siguiente tabla:

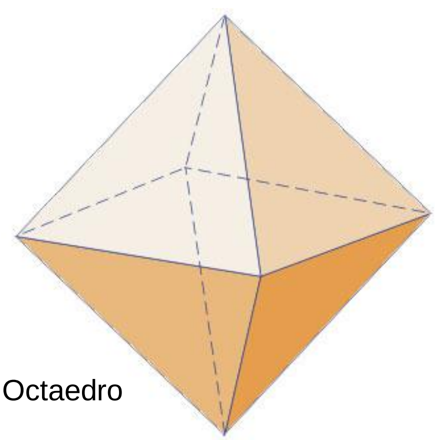
Poliedro	**No. de caras**	**No de vértices**	**No de aristas**
Tetraedro			
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			



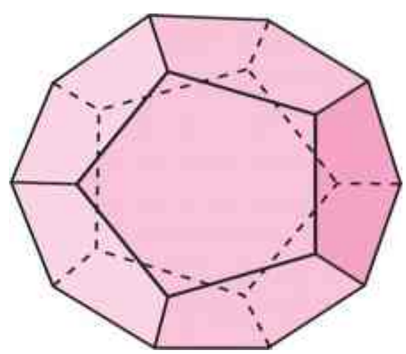
Tetraedro



hexaedro o cubo



Octaedro



Dodecaedro

3. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) Calcula el **área** y el **volumen** de un tetraedro de 5 cm de arista.

b) **Calcular** la **diagonal**, el **área lateral**, el **área total** y el **volumen** de un cubo de 5 cm de **arista**

c) Calcula el **área** y el **volumen** de un octaedro de 5 cm de arista.

d) Calcula el **área** y el **volumen** de un dodecaedro de 10 cm de **arista**, sabiendo que la **apotema** de una de sus caras mide 6.88 cm.

Medida.

Volumen de prismas y pirámides.

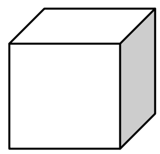
En esta sesión aprenderás a justificar las formulas para calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos.

Decimos que la fórmula para obtener el volumen de un cubo es:

Área del cuadrado = lado x lado.

Volumen del cubo = área del cuadrado x altura.

$= 1 \times 1 \times 1 = 1^3$



1 cm

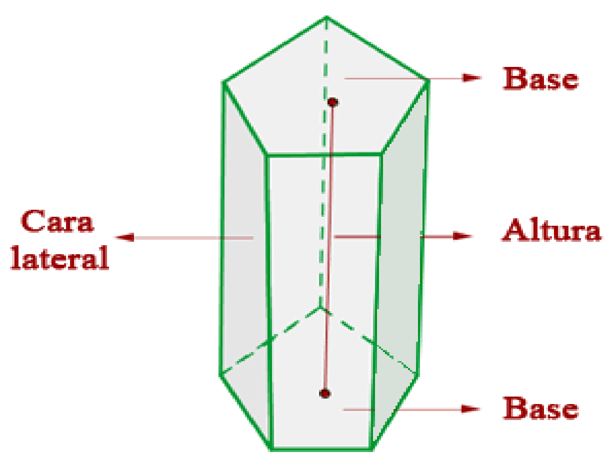
1 cm

1 cm

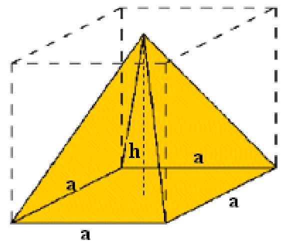
Para calcular el volumen de un prisma, sencillamente se multiplica el área de la base por la altura, de este modo:

____

(__________________)



El volumen de la pirámide recta se obtiene dividiendo entre tres al producto de su área total con su altura, es decir:



Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Si el volumen de un prisma de base triangular es $86cm^3$ ¿cuál es el volumen de la pirámide con la misma base y misma altura?

2. Si el volumen de un cubo de lado a es a^3 ¿Cuál es el volumen de un cubo de lado 2a?, ¿Y de un cubo de lado −?

3. Si tienes tres diferentes paralelepípedos de longitudes (3,4,6), (2,3,12) y (2,4,9) respectivamente, ¿Cuál de los tres tiene mayor volumen?

4. Calcula el **área lateral, el área total y el volumen** de un prisma cuya base es un rombo de de diagonales 12 y 18 cm.

5. Calcula el **área lateral, total y el volumen de una** pirámide **cuadrangular** de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.

6. Calcula el **área lateral, total y el volumen de una pirámide hexagonal** de 16 cm de arista básica y 28 cm de arista lateral.

7. Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular de aristas básicas 24 y 14 cm, y de arista lateral 13 cm.

Aplicación de volúmenes

Aprenderás a estimar y calcular el volumen de cubos, prismas y pirámides rectos, a calcular datos desconocidos, dados otros relacionados con fórmulas del cálculo de volumen.

También aprenderás a establecer relaciones de variables entre diferentes medidas de prismas y pirámides y a realizar conversiones de medidas de volumen y de capacidad y analizar la relación entre ellas.

Para la obtención del volumen de un prisma es:

Volumen del prisma= Área de la base. Altura

$V = (A_b)\ (h)$

El volumen del prisma tiene como factores al área de la base y la altura. Procediendo algebraicamente podemos despejar la altura o bien el área de la base quedándonos las expresiones.

h= –　　　　　　　　A_b = –

b

Interpretando numéricamente ambas expresiones, podemos decir que la altura es una razón del volumen al área de la base y que el área de la base es una razón del volumen a la altura.

Equivalencias

Unidad	**Galón (EUA)**	**Metros Cúbicos**	**Litros**
Galón (EUA)	1.0	0.00378	3.785
Metros cúbicos	284.17	1.0	1.000
litros	0.26417	0.001	1.0

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Hallar el área total y el volumen de un paralelepípedo recto rectangular de 8 cm de ancho. 12 cm de largo y 6 cm de profundidad.

2. De las siguientes expresiones, despeja la variable que se te indica.

a) $x= 3 + y$; y

b) $y= 16x^2$; x

c) $x^2 + y^2 =1$; x

d) $t = p^3 – 3$; p

e) $V =$ —— A, h

3. ¿Cuánto mide la arista de un tetraedro regular de $144cm^2$ de área?

4. Si la arista de un tanque de forma cúbica es de 12 dm, y se quiere otro tanque que tenga un tercio de su capacidad, ¿Cuánto medirá la arista del tanque pequeño, y qué relación hay entre la superficie total de ambos tanques?

5. El campanario de una iglesia tiene la forma de una pirámide hexagonal. La base mide 1.22 m en cada lado y su altura es de 9.4m. ¿Cuántas tejas se necesitarán para cubrir el techo del campanario, si la superficie de cada teja es de 15 cm por 10 cm? Supón que no hay pérdida al acoplarlas.

6. Un recipiente de un decímetro cubico puede contener a lo más un litro de liquido. ¿Cuántos litros contiene un cubo de lado igual a 12 cm?

7. ¿Cuántos litros contiene una pirámide de base cuadrangular, si cada uno de sus lados mide 12 m y su altura es de 8 m?

Manejo de la información

Análisis de la información.

Comparación de situaciones de proporcionalidad

Aprenderás a resolver problemas de comparación de razones, con base en la noción de equivalencia.

Lee el siguiente texto y responde las preguntas.

Don Ricardo quiere repartir un terreno entre sus tres sobrinos Martín, Helio y Edgar. Al principio pensó en dividirlo en tres partes iguales, pero después se le ocurrió darles una proporción equivalente a la razón de la edad de cada uno respecto a la edad de Don Ricardo.

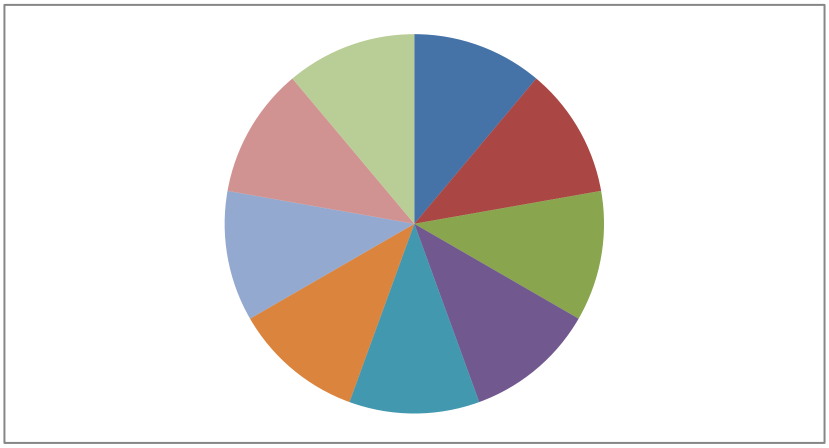
1. Si a Martín le dio − del terreno, a Helio − y a Edgar —, ¿a quién le dio la mayor parte del terreno? Si Don Ricardo tiene 60 años, ¿qué edad tiene cada uno? ¿quién es el más grande?

a) Si el terreno está dividido en 36 pequeñas parcelas, ¿Cómo las distribuirías para respetar el reparto de Don Ricardo? Usa la cuadricula como si fuera el terreno y dibuja, con diferentes colores, la parte del terreno que le correspondería a cada uno de los sobrinos.

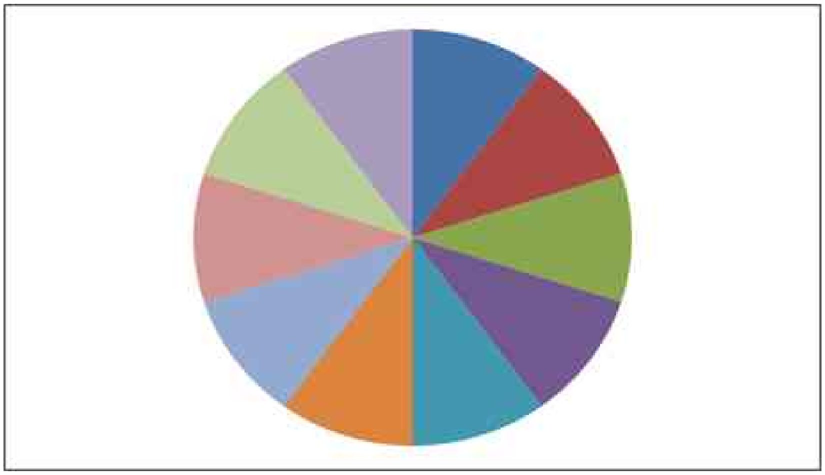
2. La maestra de Bertha organizó un día de campo con sus 10 alumnos. Uno de ellos llevó un pequeño pastel, pero Carla había comido tanto que le cedió su parte a Pepe. Cuando Pepe le dijo a la maestra que entonces a él le tocaban dos pedazos de pastel, la profesora le respondió: había pensado cortar el pastel en 10 partes iguales, pero si Carla no quiere pastel, entonces voy a cortarlo en 9 partes.

Aquí tenemos las dos opciones que tiene la profesora para dividir el pastel: en 9 o en 10 partes iguales. Tacha en cada uno, la porción que le tocaría a Pepe.

a) Pastel cortado en ______ partes



b) Pastel cortado en ______ partes

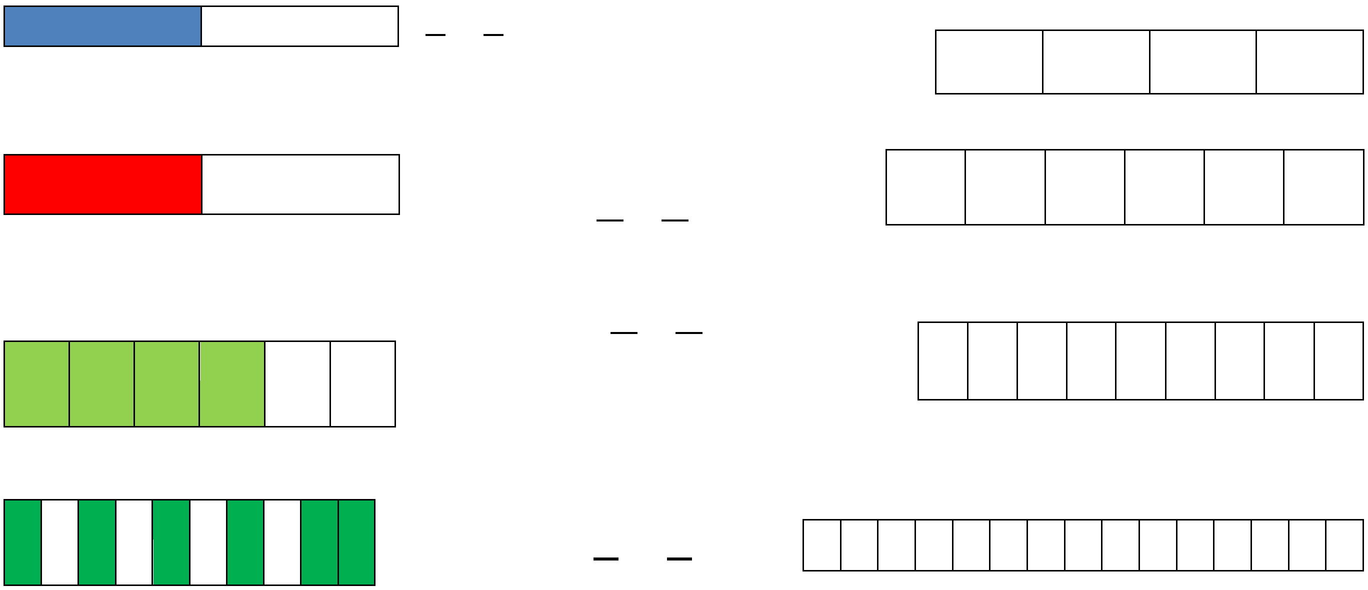


c) A simple vista, ¿con qué formula de cortar Pepe obtiene más pastel?

d) Establece la razón que representa lo que le tocaría a Pepe en cada caso.

e) En realidad, ¿con qué forma de cortar Pepe recibe más pastel? ¿se confirma lo que supiste al principio?

f)Colorea las secciones de la tira en la derecha para que la porción coloreada sea equivalente a la sombreada en la tira izquierda y establece las razones que le corresponde a cada una.



3. Identifica las razones y responde:

a) ¿Cuántos cuartos equivalen a un medio?

b) ¿Cuántos octavos equivalen a un medio?

c) ¿Cuántos octavos equivalen a un cuarto?

d) ¿Cuántos sextos equivalen a dos tercios?

e) ¿Cuántos novenos equivalen a dos tercios?

4. Identifica las razones y determina si la primera razón es mayor, menor o igual que la segunda:

c)—

Representación de la Información.

Medidas de tendencia central.

Repasarás las medidas de tendencia central de un conjunto de datos, considerando de manera especial las propiedades de la media aritmética.

Recuerda:

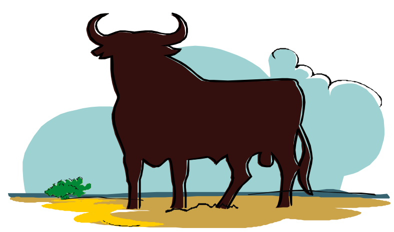
La media se calcula sumando todos los datos y dividiendo el resultado entre el número total de datos en la lista.
La moda se localiza contando las frecuencias de cada dato y eligiendo a aquel o aquellos que más veces aparezcan en la lista.

La mediana es el valor que separa por la mitad los datos ordenados de menor a mayor o de mayor a menor, es decir, si el número de datos es impar la mediana será el valor central; si es par tomamos como mediana la media aritmética de los dos valores centrales.

El rango de un grupo de datos es la diferencia entre el valor mayor y el menor de los datos.

Ejercicio:

1. El promedio de peso de 8 toros seleccionados al azar del rancho ganadero “Arroyo Grande” debe ser de al menos 520 kilogramos, afirma el señor Constantino, dueño del rancho.



Sin embargo, ya se han seleccionado 7 toros y sus pesos han sido 505, 515, 518, 530, 513, 510 y 532 kilogramos.

¿Cuánto debe pesar el último toro para que se cumpla lo que afirmó el señor Constantino con respecto al peso promedio de los 8 toros?

2. Determina cuál es la moda de los siguientes colores: verde, rojo, blanco, amarillo, azul, blanco, rojo, morado, blanco, verde, rojo, blanco, naranja, negro, verde, amarillo, blanco, verde, gris, rojo.
Representa los colores mediante un polígono de frecuencia.

3. Pregunta a tu maestro y a tus compañeros de grupo cuál es su color favorito.
Elabora una lista y representa los resultados de los colores mediante un polígono de frecuencia.
¿Cuál es la moda de los colores favoritos del grupo?

4. Pregunta a veinte de tus compañeros de grupo cuántos hermanos tienen y cuál es el promedio de las edades de sus hermanos.

Representa los resultados de los promedios en un polígono de frecuencia.
Con los datos que obtuviste, di cuál es la mediana de los promedios.

¿Qué puedes decir sobre el rango con base en los veinte promedios?

Autoevaluación Bloque 2.

Lee detenidamente cada situación, y en cada una de ellas tendrás 4 opciones. Realiza las operaciones en una hoja. Subraya con rojo la opción que creas correcta.

1.- ¿Cuál es el resultado de $\frac{(\qquad (\quad (}{(\quad (}$

a) -10 b) 90 c) -90 d) 10

2.- Si 5 chocolates y 3 dulces cuestan $31 y 4 chocolates y 6 dulces cuestan $32, ¿cuál es el precio de los dulces?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

3.- Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

a) 10 años. b) 15 años c) 20 años d) 14años

4.- Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

a) x= 36 b) x = 37 c) x= 38 d) x = 40

5.- ¿Cuál será el resultado del siguiente polinomio $(4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1)$?

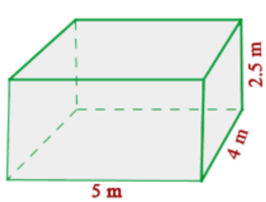
a) $10x^2 + x$ b) $12x^2 + x$ c) $14x^2 + x$ d) $10x + x$

6.- ¿Cuál será el resultado de la siguiente ecuación $(4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2)$?

a) $x^3 + x^2 + 6x - 3$ b) $x^2 + x^3 + 6x - 3$ c) $x^3 + x^2 + 6x - 2$ d) $x^3 + x2 - 5x - 3$

7.- Clara y Mariel hacen tartas de manzana que venden a supermercados. Ellas y sus tres empleados invierten 50 horas diarias para producir 150 tartas.
a) ¿Cuál es su productividad?
b) La empresa aumenta su producción a 155 tartas por día.
c) ¿Cuál es ahora su productividad?
d) ¿Cuál ha sido la variación porcentual de la productividad?

8.- Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.



a) 45 000 000 cm^3 b) 50 000 000 cm^3 c) 55 000 000 cm^3 d) 51 000 000cm^3

9.- Hallar el área lateral de un prisma cuadrilátero regular recto, sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y su arista lateral 12 cm.

a) 288 cm^2 b) 289cm^3 c) 287cm^2 d) 285cm^3

10.- Hallar el área lateral de una pirámide cuadrilátera regular recta, cuyo lado de la base mide 10 cm. y su altura es de 6 cm.

a) 40 x 7.81cm^2 b) 45 x 7.81cm^2 c) 45 x 7.83cm^2 d) 40 x 7.82 cm^2

11.- En una pirámide cuadrilátera regular recta, el lado de la base es 6 mm, si la arista lateral mide 5 mm, hallar el volumen.

a) V = 48 mm^3 b) V = 49 mm^3 c) V = 47 mm^3 d) V = 46 mm^3

12.- Halla el valor de *x* para que las dos razones estén en proporción $\frac{12}{x}=\frac{30}{85}$

a) x = 34   b) x = 35   c) x = 37   d) x = 38

13.- Halla el valor de *x* para que las dos razones estén en proporción $\frac{3}{x}=\frac{34}{170}$

a) x = 15   b) x = 16   c) x = 14   d) x = 18

14.- ¿Cuál es la moda de los datos: 5, 7, 5, 9, 1, 4, 6, 7, 4, 6, 3, 7, 3, 8

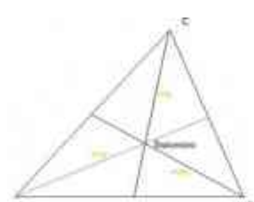
a) 5   b) 5.5   c) 7   d) 6

15.- ¿Cuál es la media de los datos: 4, 5, 8, 6, 7, 4, 5, 8, 7, 4, 6?

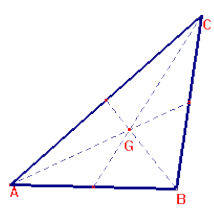
a) 5.81   b) 4.0   c) 6.0   d) 5.45

16.- ¿En cuál de los triángulos se han trazado las medianas del triangulo ABC?

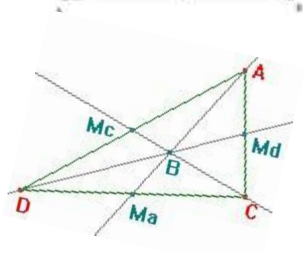
a)



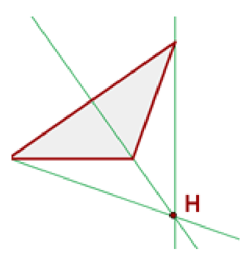
b)



c)



d)



Bloque 3

Sentido numérico y pensamiento algébrico

Significado y uso de las literales.

Sucesiones de números con signo.

Una sucesión es un tipo de relación que se establece entre números. Los términos de una sucesión normalmente están ordenados y se relaciona la posición que ocupa cada término con ese mismo término.

Realiza el siguiente ejercicio:

1. A continuación aparecen varias sucesiones numéricas. Observa el comportamiento que tiene cada una y busca una regla o expresión algebraica que te permita determinar otros nuevos términos.

a) -1, -3, -5, -7, -9,…

b) – – – – —

c) 0, 3, 10, 15, 26, 35, 50,…

d) -3, -6, -9, -12, -15, -18, ….

e) − − − − − , …

2. Halla los primeros diez números que generan las siguientes reglas (fórmulas), recuerda que la n representa un número natural, es decir, n = 1, 2, 3, 4, 5,…,10 para este caso.

a) n + 3

b) 2(1 - n)

c) –

d) (−)

e) (

Significado y uso de las literales.

Ecuaciones de primer grado.

Aprenderás a resolver problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma ax + bx + c = dx + ex + fx con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros o fraccionarios, positivos o negativo

Se llaman ecuaciones a igualdades en las que aparecen número y letras (incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas.

Son ecuaciones con **una incógnita** cuando aparece una sola letra (incógnita, normalmente la x).

Por **ejemplo**: $x^2 + 1 = x + 4$

Se dice que son de **primer grado** cuando dicha letra no está elevada a ninguna potencia (si no aparece ninguna potencia significa que el número está elevado a la potencia 1).

Ejemplos:
3x + 1 = x - 2

1 - 3x = 2x - 9

x - 3 = 2 + x

– = 1 - x + —

Son estas últimas las ecuaciones que vamos a resolver en esta lección.

Solución numérica y gráfica

Supongamos que queremos resolver la ecuación: 3x + 1 = x - 2.
Resolver una ecuación es encontrar un valor de x que, al ser sustituido en la ecuación y realizar las operaciones indicadas, se llegue a que la igualdad es cierta.
En el ejemplo podemos probar con valores:
x = 1, llegaríamos a 5 = -2, luego no es cierto,
x = -1 llegaríamos a -2 = -3, tampoco. Resolvámosla entonces para hallar el valor de x buscado:

Numéricamente, como seguramente sabrás, se resuelve "despejando" la x, o sea ir pasando términos de un miembro a otro hasta conseguir: x =...Número. Así:

3x - x = -1 - 2; 2x = - 3; x = — ó x = -1,5.

Efectivamente: 3(-1,5) + 1 = -1,5 -2; -4,5 + 1 = -3,5. ¡Cierto!.

Para resolver una ecuación de primer grado se utilizan dos reglas fundamentales para conseguir dejar la "x" sola en el primer miembro. Veámoslas para el ejercicio anterior:
$3x + 1 = x - 2$.

- Sumar o restar a los dos miembros un mismo número. En este caso restar 1 a los dos miembros y restar x a los dos miembros:
$3x + 1 -1 - x = x - x - 2 -1$, que una vez operado queda: $2x = -3$. Produce el mismo efecto lo que llamamos "**pasar de un miembro a otro sumando lo que resta o restando lo que suma"**

- Multiplicar o dividir los dos miembros por un mismo número. En este caso por 2:

$2x/2 = -3/2$, que una vez simplificado queda x = — como ya habíamos obtenido antes. Produce el mismo efecto lo que llamamos **"pasar de un miembro a otro lo que está multiplicando dividiendo o lo que está dividiendo multiplicando**".

Ejercicio
1**.** Resuelve numéricamente la ecuación: **$1 - 3x = 2x - 9$.**

Ecuaciones que no tienen solución

2. Resuelve la siguiente ecuación:
$x - 3 = 2 + x$.

Rápidamente obtendrás la expresión **$0 = 5$** ¿qué significa? Desde luego esta igualdad no es cierta independientemente del valor que tome x.
Decimos que en este caso la ecuación no tiene solución.

3. Resuelve numéricamente, comprobando que no tiene solución la ecuación:
$3x - 2 + x = 5x + 1 - x$

Ecuaciones con infinitas soluciones

4. Resuelve la siguiente ecuación:
$2x - 1 = 3x + 3 - x - 4$

Ahora habrás llegado a la expresión $0 = 0$ ¿qué significa ahora? La igualdad que has obtenido es cierta pero se te han eliminado la x. ¿Cuál es la solución?

Si la igualdad es cierta seguro, ¡***lo será para cualquier valor de x***! Compruébalo sustituyendo x por 0, 1, -3 u otro valor que desees.

En este caso se dice que la ecuación tiene **infinitas soluciones (cualquier valor de x es solución).** Este tipo de ecuaciones se denominan **identidades**.

5. Comprueba que la siguiente ecuación es una identidad.
$3x - 2 + x = 1 + 4x - 3$

Problemas de aplicación

Una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones es la de resolver problemas de la vida cotidiana.

Ejemplo:
El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y este 3 más que el menor. Si entre todos tiene la edad del padre que tiene 40 años ¿qué edad tiene cada hermano?
Para resolver estos problemas debemos elegir algún valor desconocido para llamarle "x". En este caso llamemos:
x = edad del hermano menor.
A partir de ello expresar los datos del problema y plantear una igualdad (ecuación) con ellos: Será:
$x + 3$: edad del hermano mediano
$x + 3 + 4 = x + 7$ edad del hermano mayor
Ecuación: suma de las edades de los hermanos = 40; $x + x+3 + x+7 = 40$,

Resolviendo la ecuación se obtiene **$x = 10$**, luego la solución del problema es:

Edades de los tres hermanos: 10, 13 y 17 años.

Plantea y resuelve numéricamente el siguiente problema:

6. En una caja hay el doble de caramelos de menta que de fresa y el triple de caramelos de naranja que de menta y fresa juntos. Si en total hay 144 caramelos, ¿cuántos hay de cada sabor?

7. Resuelve numérica y gráficamente los ejercicios y problemas siguientes:

a) $\mathbf{-5x = 12 - x}$

b) $\mathbf{2(x - 7) - 3(x + 2) + 4(x + 1) - 2 = 0}$ (¡Ojo con los signos delante de los paréntesis!)

c) **3x - 5 = − (**Observa que para eliminar el 2 basta multiplicar toda la ecuación por 2)

d) **3x + 4 - x = 7 + 2x**

e) **$2x - 1 = 3(x + 2) - x$**

f) El perímetro de un jardín rectangular es de 58 m. Si el lado mayor mide 11 m más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?

g) Halla un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.

8. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $2x - 3 = 6 + x$

b) $2(2x - 3) = 6 + x$

c) $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

d) $\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$

e) $4(x-10) = -6(2 - x) - 6x$

f) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$

Manejo de la información

Representación de la información

Relación funcional

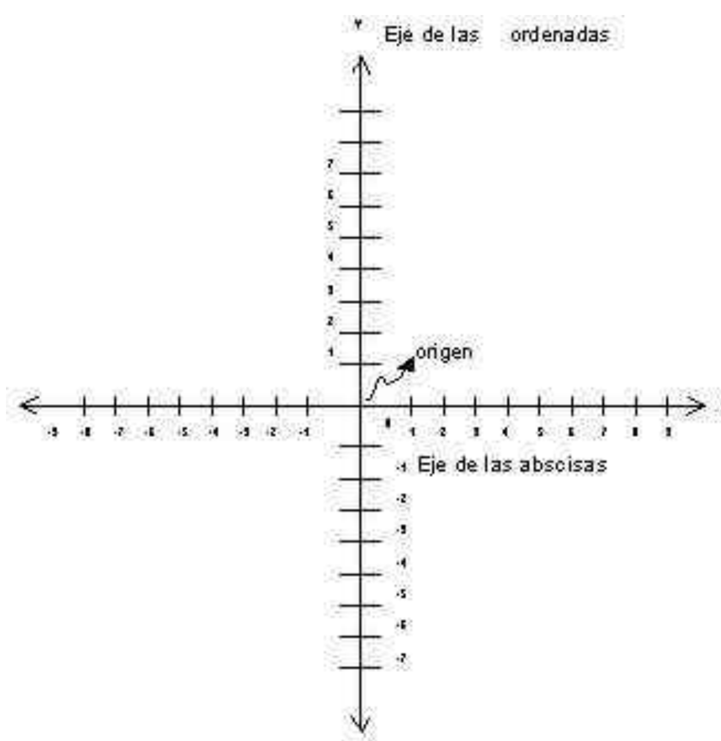
En esta sesión aprenderás a reconocer en situaciones problemáticas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y a representar esta relación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma:

La construcción de graficas puede hacerse mediante bosquejos, en los que se muestre, el comportamiento de una variable respecto a otra.
Otra forma de construir gráficas es a través de una tabla que relaciones elementos del dominio con el contra dominio. Por ejemplo, para la función f(x)= x+2, elegimos 6 números de dominio para encontrar su correspondiente valor del contra dominio.

Al usar esta estrategia, se debe tener en cuenta que la elección del dominio es sólo de 6 elementos, sin embargo es posible tantos como se puedan obtener para lograr trazar el bosquejo de la grafica. Elegir más elementos del dominio nos permite tener elementos del contra dominio y, en consecuencia, tenemos más precisión de la forma de la gráfica.

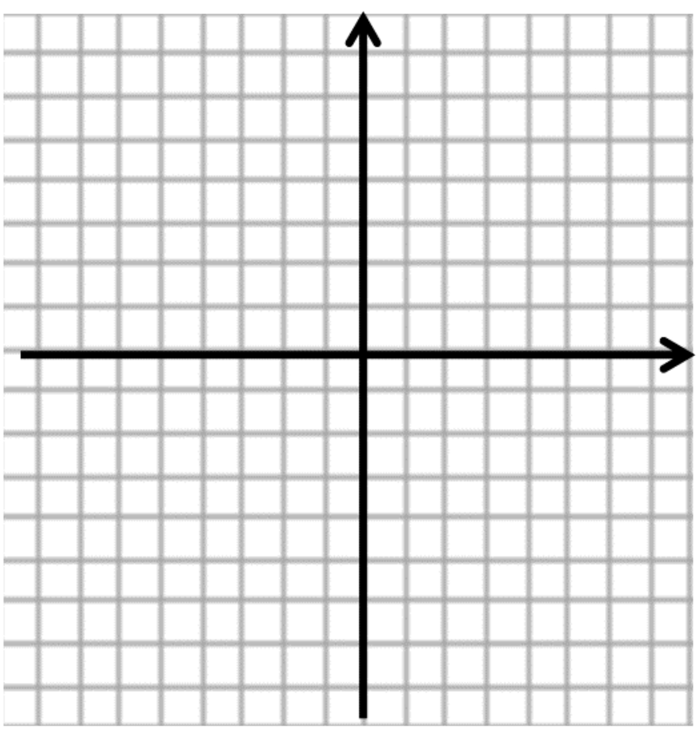
Colocamos en el plano coordenado los puntos que nos indican las coordenadas que se obtiene de la tabla: (0,2); (1,3); (2,4); (-2,0); (-3,-1), cada pareja está formada por un elemento del dominio y su respectivo valor del contra dominio. (Grafica los valores).

x	y
0	2
1	3
2	4
-1	1
-2	0
-3	-1



Completa la siguiente tabla evaluando la función. Construye la gráfica de las tres funciones en un mismo plano coordenado.

	X=-1	X= 0	X = 1	X = 2	X= –	X = 5
y = 2x						
y=2x -2						
y= 2x +3						



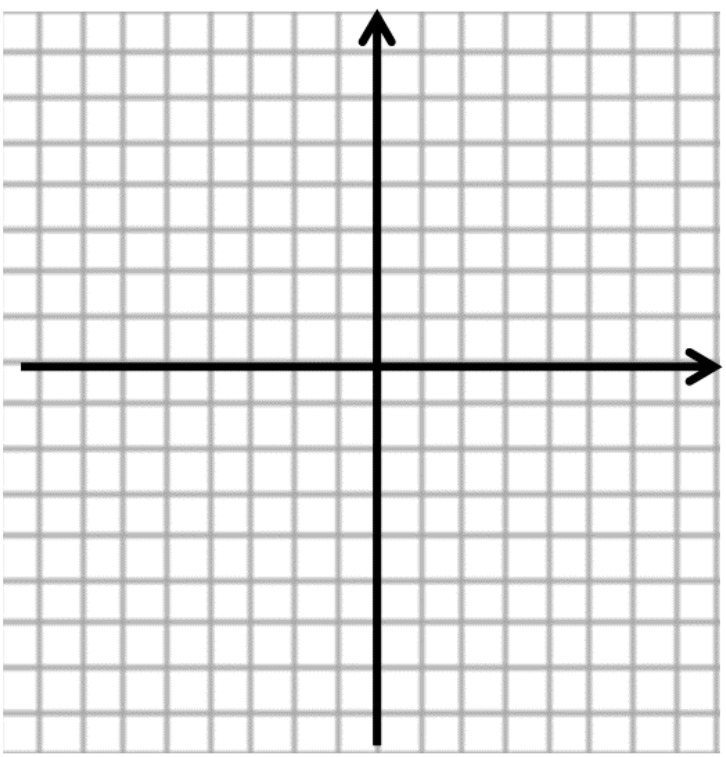
¿Qué tipo de graficas se generan de las funciones anteriores? ¿Tienen algo en común?

Para cocer medio kilo de verduras se requiere agregarles 20 gramos de sal.

Escribir una ecuación que muestre la relación entre la cantidad de verdura y la cantidad de sal necesaria para un conocimiento de este tipo.

¿Cuántos kg de verdura se necesitan para ocupar 1 kg de sal?

Construye la gráfica de la función.



Forma, espacio y medida.

Formas geométricas.

Los polígonos y sus ángulos internos.

Polígonos

IRREGULARES	*REGULARES*
Sus lados son distintos o ángulos internos distintos.	*Sus lados son iguales y ángulos internos iguales.*

NÚMERO DE LADOS	**NOMBRE**
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Nonágono
10	Decágono

DIAGONALES: Para cualquier polígono, la fórmula para hallar la cantidad de diagonales que posee es:

$$\boxed{\frac{n(n-3)}{2}}$$

Ejemplo:

Determinar la cantidad de diagonales que posee un polígono de 28 lados.

En este caso n = 28, luego

$$\frac{28(28-3)}{2} = \frac{28 \cdot 25}{2} = 350$$

Un polígono de 28 lados posee 350 diagonales.

Ángulos internos: **Sólo** para **polígonos regulares**, la fórmula para hallar la medida de cada ángulo interno es:

$$\boxed{\frac{180(n-2)}{n}}$$

Suma de ángulos internos: Para cualquier polígono la suma de sus ángulos internos es:

$$\boxed{180(n-2)}$$

NOTA: La fórmula anteriormente entregada no necesita la hipótesis de polígono regular.

Ejercicios

Polígonos

1. Calcular el valor de cada ángulo interior de un:

a) Pentágono regular

b) Octágono regular

c) Decágono regular

d) Heptágono regular

2. Calcular el valor de cada ángulo exterior de un:

a) Hexágono regular

b) Eneágono regular

c) Dodecágono regular

d) Pentadecágono regular

3. Calcular el número total de diagonales de un:

a) Cuadrilátero

b) Pentágono

c) Hexágono

d) Undecágono

e) Eneágono

4. Calcular el número de lados de los siguientes polígonos si la suma de sus ángulos interiores mide:

a) 1980º

b) 900º

c) 1620º

d) 1260º

5. Calcular el número de lados de los siguientes polígonos regulares si el valor de cada ángulo interior es de:

a) 140º

b) 162º

c) 156º

d) 150º

e) 140º

6. Hallar el número de lados de un polígono regular si el valor de cada ángulo externo es:
a) 45º

b) 72º

c) 40º

d) 60º

7. Comprueba que la fórmula para trazar las diagonales a partir de un vértice es válida para un triángulo.

8. A partir de un mismo vértice, ¿Cuántos diagonales se pueden trazar en un?

a) Hexágono

b) Heptágono

c) Eneágono

d) Undecágono

9. Utiliza los resultados anteriores. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar a partir de un vértice en un polígono de n lados?

10. ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar exactamente 35 diagonales?

11. ¿Cuál es el valor de cada uno de los ángulos interiores en un?
a) Triangulo equilátero

b) Pentágono regular

c) Octágono regular

d) Heptágono regular

12. Si el ángulo exterior de un polígono regular mide 45°, ¿Cuál es el número de sus diagonales totales?

13. Un ángulo central en un polígono regular es aquel que se forma al unir el centro de éste con dos vértices consecutivos. ¿Qué polígono tiene sus ángulos centrales iguales a 45°?

14. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores del polígono cuya apotema es la mitad de la longitud de su lado?

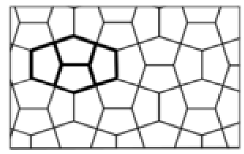
15. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior es dos veces la magnitud de su ángulo interior?

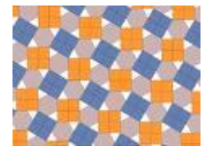
Mosaicos y Recubrimientos

En esta lección aprenderás a conocer las características de los polígonos que permiten cubrir el plano y realizar recubrimientos del plano.

Un **teselado** es una regularidad o patrón de figuras que cubre o pavimenta completamente una superficie plana que cumple con dos requisitos:

1. que no queden huecos
2. que no se superpongan las figuras





Los teselados se crean usando transformaciones isométricas sobre una figura inicial.

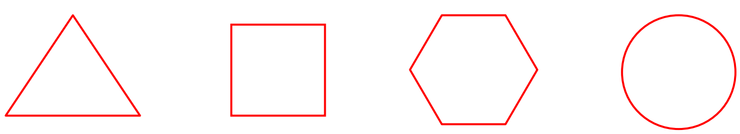
Distintas culturas en el tiempo han utilizado esta técnica para formar pavimentos o muros de mosaicos en catedrales y palacios.

1. ¿Se puede teselar el plano con un trapecio cualquiera?

2. Un polígono regular puede teselar el plano, siempre que su ángulo interior sea un divisor de 360°, ¿Con qué polígonos regulares puede teselarse el plano?

3. ¿Se puede teselar el plano con un dodecágono regular?

Observa las siguientes figuras(los tres polígonos son regulares) tienen el mismo perímetro.



Figuras con perímetro igual a 12 unidades.

¿Con cuáles de las figuras anteriores se puede teselar un plano?

¿Cuál es el área de cada una de ellas?

Si se tuviera 1 000 piezas de cada una de las figuras anteriores, ¿Con cuál lograrías cubrir una mayor superficie?

Manejo de la información.

Representación de la Información.

Las características de la línea recta.

Se llama función a la relación o correspondencia de dos o más cantidades, que puede expresarse mediante un enunciado, una formula, una tabla de números, una gráfica entre otras.

En esta lección trabajaremos con la función lineal, cuya expresión algebraica es y= mx + by, donde m y b son constantes cualesquiera - enteras, fraccionarias o decimales-, x es la variable independiente porque puede tomar diversos valores, mientras que y es la variable dependiente porque depende del valor que tome x. en una función, a cada valor de la variable independiente se le relaciona solo un valor de la variable dependiente.

Cada dos semanas se da mantenimiento a la alberca olímpica de ciudad universitaria. La capacidad de la alberca es de 6 500 000 litros que salen por un conducto a razón de 1 200 litros por minuto.
Calcula el tiempo, en horas, que tardará en vaciarse la alberca, para poder limpiarla.

Completa la tabla de datos, donde se relaciona el tiempo que transcurre y la cantidad de agua que sale de la alberca.
Grafica estos puntos en un plano cartesiano.

Horas	Litros que han salido
5	360 000
10	
15	
25	
40	
60	
80	

La siguiente tabla indica la cantidad de luz que emite un foco según el voltaje que recibe. Construye una gráfica y marca los puntos cuyas coordenadas son (1, 0.5) y (15, 7.5), estos puntos corresponden a la relación 1 volt produce una cantidad de luz de 0.5 lúmenes y 15 volts producen una cantidad de luz de 7.5 lúmenes.

Voltaje (V)	Intensidad de luz (lm)
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3
7	3.5
8	4
9	4.5
10	5
11	5.5
12	6
13	6.5
14	7
15	7.5

Une los dos puntos de la gráfica con una recta.
Coloca en la gráfica todos los puntos que indica la tabla, ¿coinciden con la recta?
Utiliza ahora la regla de tres para encontrar los valores anteriores, ¿hay mucha diferencia con los que aproximaste usando la gráfica?

Voltaje (V)	**Cantidad de luz (lm)**
0.5	
1.5	
2.5	
3.5	
4.5	
5.5	
6.5	
7.5	
8.5	
9.5	
10.5	
11.5	
12.5	
13.5	
14.5	

Autoevaluación Bloque 3.

Lee detenidamente cada situación, y en cada una de ellas tendrás 4 opciones. Realiza las operaciones en una hoja. Subraya con rojo la opción que creas correcta.

1.- ¿Cuál de las reglas sirve para obtener la sucesión 4,2,0…?

a) 2n+3 b) 2n +2 c) 8 – 4n d) 6 – 2n

2.- ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 20 en la sucesión 1, 4, 7, 10…?

a) 58 b) 23 c) 61 d) 18

3.- En los estados de cuenta de tarjetas de crédito bancarias, la cantidad que el cliente paga aparece con signos negativos. Guadalupe hizo 3 depósitos de 250 pesos, ¿cuál de las cantidades aparecerá como abono en su siguiente estado de cuenta?

a) 650 b) 750 c) -650 d) -750

4.- ¿Qué número es equivalente a 4.5×10^4?

a) 4 500 b) 45 000 c) 450 000 d) 4 500 000

5.- ¿Cuál es la solución de — - 8 = 2?

a) x = - — b) x = 4 c) x = 3 d) x = - –

6.- ¿Cuántas veces es mayor Guillermo que Juan si tienen 30 y 12 años respectivamente?

a) 1.5 b) 2.5 c) 2.8 d) 3.5

7.- Determina el número equivalente a 5.12×10^{-7}

a) 0.000512 b) 0.0000512 c) 0.00000512 d) 0.000000512

8.- Determina el resultado de la operación $\frac{(\quad (}{}$

a) 4 b) 6 c) 9 d) 18

9.- Encuentra el valor de la incógnita de la ecuación 4-6x = 2x -20

a) -3 b) 24 c) 3 d) -24

10.- Juanita tiene el doble de la edad de Rosa, si la diferencia entre sus edades es de 6 años, ¿Cuál de las ecuaciones mostradas puede ser utilizada para resolver el problema?

a) $2x - x = 6$ b) $2x + x = 6$ c) $2x = x$ d) $2x = 6$

11.- La suma de 4 números consecutivos es 54. ¿Cuál es el primero de ellos?

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

13.- El área del cuadrado es $C^{2,}$ ¿Cuál es su perímetro?

a) 2c b) 4c c) C^3 d) C^4

14.- Un costal de 5 kilogramos de croquetas le dura a un perro 15 días. ¿Cuántos días le durará un costal de 15 kilogramos?

a) 30 b) 35 c) 40 d) 45

15.- Si 5 obreros tardan 8 horas en realizar un trabajo, ¿Cuántas horas tardarán en realizar el mismo trabajo 8 obreros?

a) 12.8 b) 5 c) 11 d) 10.5

Bloque 4

Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Significado y uso de las operaciones.

Potencias y notación científica.

Multiplicación de potencias de igual base.

La multiplicación de dos o más potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la suma de los exponentes respectivos $a^n \times a^m = a^{n+m}$

División de potencias de igual base.

La división de dos potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos — a^{n-m}

Potencia de exponente 0

Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1: $a^0 = 1$, se cumple que a 0.

Potencia de exponente 1

Toda potencia de base a y exponente 1 es igual a: $a^1 = a$

Potencia de exponente negativo.

La potencia de base a distinta de 0 y exponente negativo (-n) es igual a a^{-n} = —

Si se cumple que a 0

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla, que relaciona a un número con seis de sus potencias.

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
					1	1		
					2	4		
					3	9		
					4	16		
					5	25		
					6	36		
					7			

2. Calcula el valor de x para que la igualdad se cumpla:

	Valor para x
$3^x \times 3^4 = 3^{10}$	
$\frac{5^6}{5^x} = \frac{1}{25}$	
$2^7 \times 2^x = 2^7$	
$(3x10^4)(2x10^x) = 6 \times 10^2$	
$4^{-8} = \frac{1}{4^x}$	

3. Juan, un compañero de otra escuela secundaria, le dice a su maestro que $2^0 = 0$ por que el 2 no se multiplica ninguna vez y queda cero. ¿Qué opinas de su afirmación?

4. Pedro, un compañero de otra escuela secundaria, asegura a su maestro que $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$ por que el -2 multiplica tres veces. ¿Qué te parece su argumento?
Observa que $2^4 = 16$ y $4^2 = 16$ Para dos números naturales a y b, ¿$a^b = b^a$ siempre es cierto?

5. ¿Cuál es la mitad de 2^{2006}?

6. Halla el valor de x para que se cumpla la igualdad $2^{(3x-18)} = 1$.

7. Recorta una tira de cartulina que tenga 10 centímetros de ancho y un metro de largo. Dobla la tira a lo largo, luego a la mitad de ahí a la mitad, después a la mitad y otra vez a la mitad. Supón que puedes ir dividiendo a la mitad tantas veces como quieras……
a) ¿Qué parte del total representa la tira generada por el tercer doblez?

b) ¿Qué parte del total representa la tira generada por el cuarto doblez?

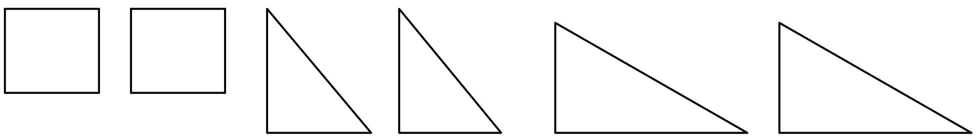
c) ¿Qué parte del total representa la tira generada por el doblez número n?

Forma, espacio y medida.

Formas geométricas.

Triángulos congruentes.

Al observar y comparar figuras geométricas, se advierte que, en algunos casos, dos de ellas tienen la misma forma pero no el mismo tamaño y, en otros, puede ser que sean de igual forma y tamaño. Al comparar dos figuras, si observamos que tienen la misma forma y la misma medida, decimos que las figuras son **congruentes**.

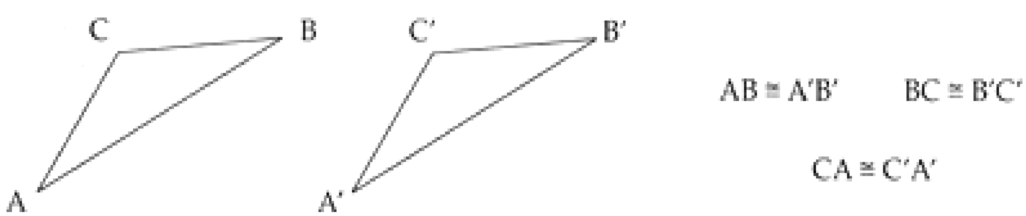


El símbolo que se emplea para denotar la congruencia es

Para comparar dos triángulos y determinar si existe congruencia entre ellos, existen tres criterios, que se describen y ejemplifican a continuación.

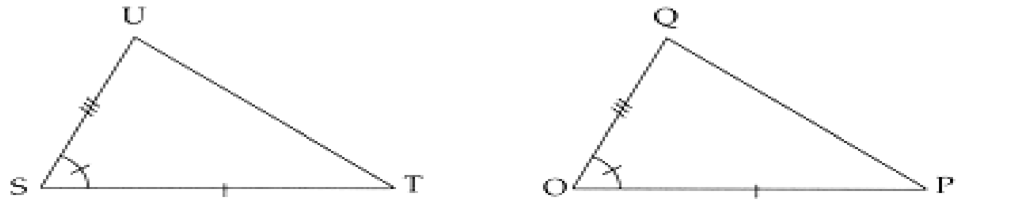
Primer criterio: lado, lado, lado (LLL)

Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos son congruentes a los lados del otro triangulo.



Segundo criterio: lado, ángulo, lado (LAL)

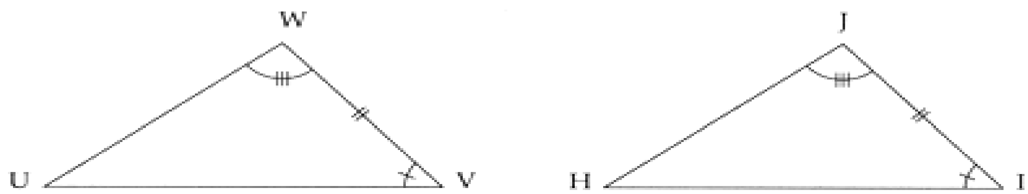
Dos triángulos son congruentes si, en el primer triangulo, dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos del segundo triangulo



$\triangle STU \cong \triangle OPQ$ en virtud de que: $\overline{SU} \cong \overline{OQ}$; $\measuredangle S \cong \measuredangle O$., $\overline{ST} \cong \overline{OP}$

Tercer criterio: ángulo, lado, ángulo (ALA)

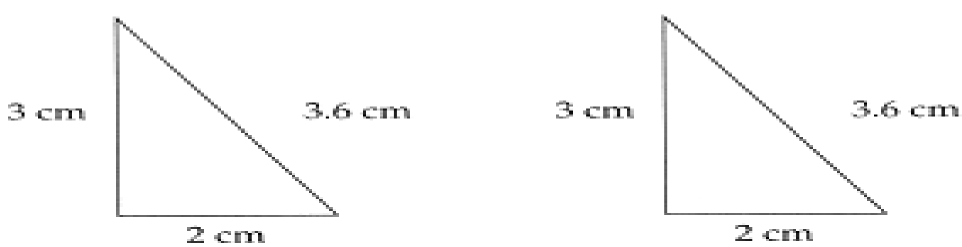
Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, de uno de los triángulos, son congruentes con dos de los ángulos y el lado comprendido entre ellos del otro triangulo.



$\triangle UVW \cong \triangle HIJ$ en virtud de que: $\measuredangle V \cong \measuredangle I$; $\overline{VW} \cong \overline{IJ}$., $\measuredangle W \cong \measuredangle J$

Con la finalidad de ejemplificar los criterios de congruencia de los triángulos, considérense los puntos que se dan a continuación.

1. Los siguientes triángulos son congruentes, lo cual puede comprobarse al medir los lados de cada triangulo.



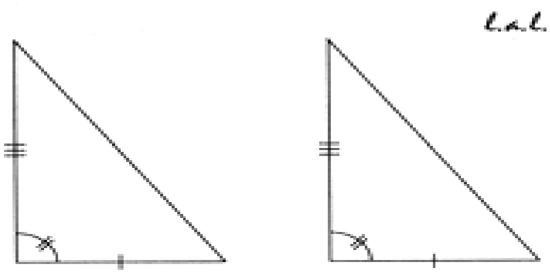
2. Los siguientes triángulos no son congruentes, lo cual se comprueba al medir los lados de cada triangulo.

3. En los siguientes triángulos, los segmentos y los ángulos congruentes están marcados de la misma manera. En función de tal circunstancia, es posible determinar en cuál de los tres criterios de congruencia son **LLL, LAL** y **ALA**.

a)

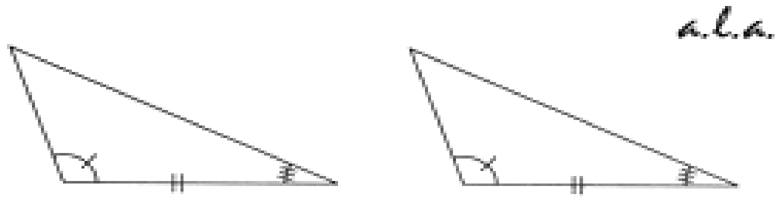
Como puede observarse, los tres lados del primer triangulo son congruentes con los tres lados del segundo triangulo; por lo tanto, estos triángulos se identifican con el primer criterio de congruencia: lado, lado, lado **(LLL)**.

b)



Puede verse que estos triángulos son congruentes debido a que presentan sus ángulos y sus lados congruentes, respectivamente; por lo tanto, se identifican con el segundo criterio de congruencia: lado, ángulo, lado **(LAL)**.

c)



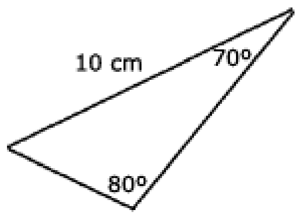
Estos triángulos también son congruentes, ya que dos ángulos y el lado comprendido entre los ángulos del primer triangulo son congruentes con respecto al segundo triangulo; por lo tanto, estos triángulos se identifican con el tercer criterio de congruencia: ángulo, lado, ángulo **(ALA)**.

Con base en el conocimiento de los criterios de congruencia se puede demostrar con facilidad cuando dos triángulos son congruentes.

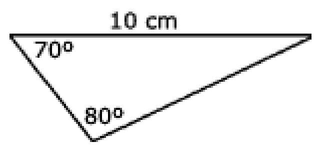
Responde lo siguiente:

1. Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes.

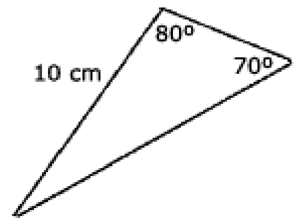
I.



II.

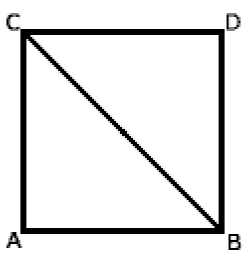


III.



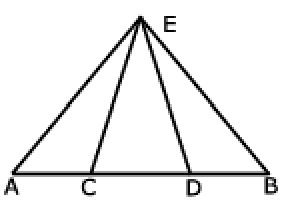
a) Sólo I y II b) Sólo I y III c) Sólo II y III d) I, II y III e) Ninguno

2. Un alumno para demostrar en el cuadrado de la figura que $\triangle ABC \cong \triangle BCD$, determinó que $AB \cong BD$, que $AC \cong DC$ y que el $\angle CAB \cong \angle BDC$, por ser rectos. ¿Qué criterio de congruencia utilizó?



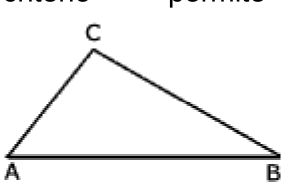
a) LLL b) LAL c) ALA d) AAL e) LLA

3. En la figura, el $\triangle CDE$ es isósceles. C es punto medio de AD y D es punto medio de CB. ¿Qué criterio de congruencia permite demostrar que el $\triangle ACE \cong \triangle BDE$?



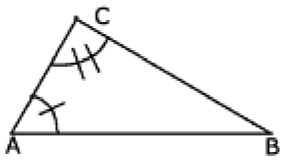
a) LAL b) ALA c) LLA d) LLL e) AAL

4. En los triángulos siguientes se verifica que $AB \cong DE$, que $BC \cong EF$ y que el $\angle CAB \cong \angle FDE$. ¿Qué criterio permite demostrar que estos triángulos son congruentes?



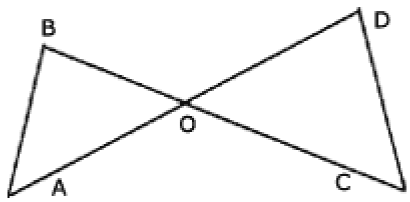
a) LLL b) LAL c) ALA d) LLA e) Falta Información

5. En la figura, el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, entonces se verifica que:



a) $AC \cong DF$ b) $BC \cong DE$ c) $AB \cong FE$ d) $AC \cong FE$ e) $AB \cong FD$

6. Para demostrar que los triángulos AOB y COD de la figura, son congruentes, es necesario saber que:



a) $AB \cong DC$ b) $\angle BAO \cong \angle DCO$ c) $AB // CD$

d) $AO \cong DO$ y $AB \cong CD$ e) $BO \cong CO$ y $AO \cong DO$

7. Marca la alternativa de la proposición verdadera

a) Dos triángulos rectángulos son congruentes si sus ángulos agudos respectivos son congruentes.

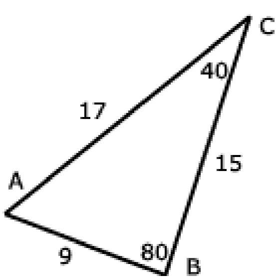
b) Dos triángulos son congruentes si sus lados homólogos miden lo mismo.

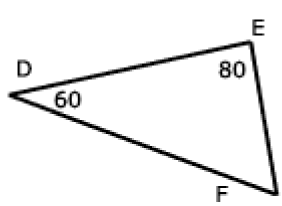
c) Dos triángulos son congruentes si sus ángulos respectivos son iguales.

d) Para demostrar que dos triángulos son congruentes se puede utilizar el criterio AAL

e) Todos los triángulos equiláteros son congruentes.

8. Los triángulos ABC y DEF de la figura son congruentes, entonces la medida de EF es:

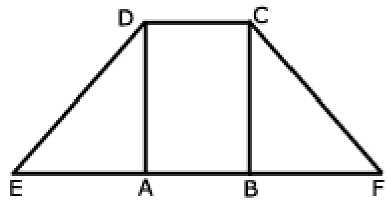




a) 9 b) 15 c) 17 d) 40

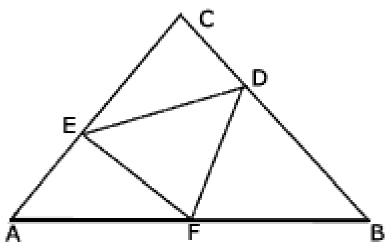
e) Falta información

9. En la figura, ABCD es rectángulo y el $\angle$DEA $\cong\angle$CFB. ¿Qué criterio permite demostrar que el $\triangle$EAD $\cong\triangle$FBC?



a) LLL b) LLA c) ALA d) LLA e) Falta Información

10. En la figura, $\triangle$ABC equilátero y AF $\cong$ BD $\cong$ CE. El criterio que permite demostrar que los triángulos AFD, ECF y BDE son congruentes es:



a) LAL b) LLL c) ALA d) LLA e) LAA

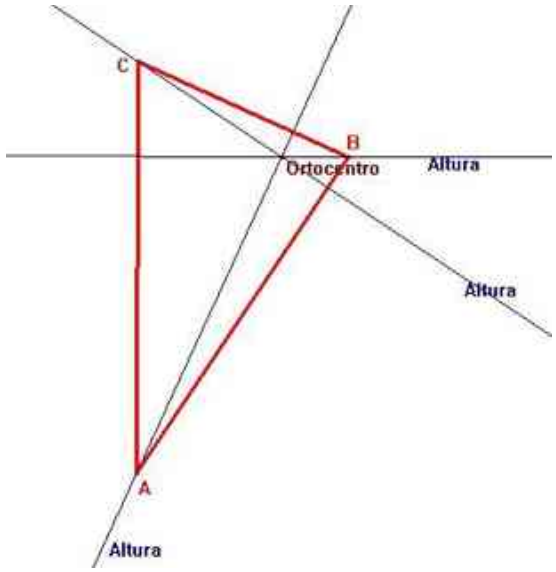
Puntos y rectas notables del triangulo

Aquí se va a explorar las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triangulo.

Alturas de un triángulo

Altura es cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación).

Ortocentro

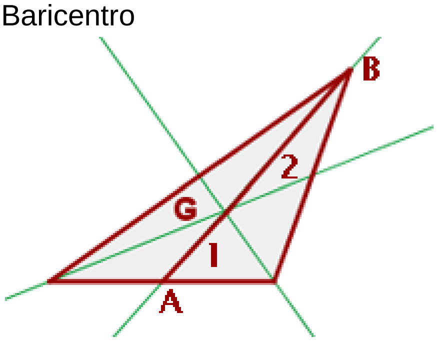


Es el punto de corte de las tres alturas.

Medianas de un triángulo

Mediana es cada una de las rectas que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto.

Baricentro



Es el punto de corte de las tres medianas.

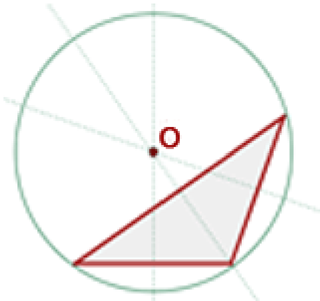
El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos, el segmento que une el baricentro con el vértice mide el doble que el segmento que une baricentro con el punto medio del lado opuesto.

BG = 2GA

Mediatrices de un triángulo

Mediatriz es cada una de las rectas perpendiculares trazadas a un lado por su punto medio.

Circuncentro

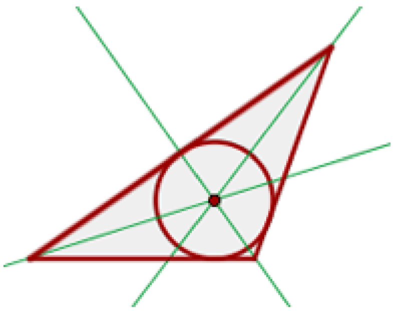


Es el punto de corte de las tres mediatrices.
Es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo.

Bisectrices de un triángulo

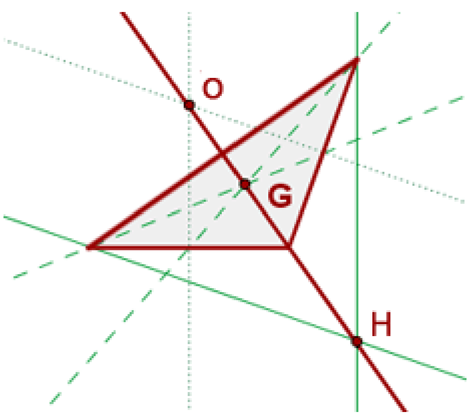
Bisectriz es cada una de las rectas que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

Incentro



Es el punto de corte de las tres bisectrices.
Es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo.

Recta de Euler



El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo no equilátero están alineados; es decir; pertenecen a la misma recta, llamada recta de Euler.

Realiza los siguientes ejercicios que se dan a continuación en la siguiente página. Corrobora tus resultados con las soluciones.

1.- En el triángulo de vértices $A=(2,2)$, $B=(-2,0)$ y $C=(2,4)$, Halla la ecuación de las medianas.
Sol: $y=2$; $3x-4y+6=0$; $3x-2y+2=0$

2.- Halla las coordenadas de los tres vértice del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $M=(3,3)$, $N=(2,2)$ y $P=(2,4)$.
Sol: $(1,3)$, $(3,1)$, $(3,5)$

3.- Halla los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas r, s y t de ecuaciones: r: $x=1$; s: $x+y=2$; t: $5x+y-2=0$.
Sol: $(1,1)$; $(1,-3)$; $(0,2)$

4.- Calcula el área limitada por la recta $(x/3)+(y/6)=1$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Sol: 9 u^2

5.- Indica qué tipo de triángulo es el de vértices ABC, siendo: a) $A=(3,2)$; $B=(1,0)$; $C=(5,4)$; b) $A=(2,3)$; $B=(-1,2)$; $C=(1,6)$; c) $A=(1,3)$; $B=(5,1)$; $C=(2,5)$.
Sol: a) Isósc.; b) Isósc. rectángulo; c) Rectángulo

6.- Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A=(1,4)$, $B=(3,-2)$ y $C=(-1,0)$. Sol: 10 u^2

7.- Halla las coordenadas del baricentro (punto de corte de las medianas), del triángulo de vértices: $A=(0,2)$, $B=(-3,4)$ y $C=(3,0)$. Sol: $(0,2)$

8.- Halla las ecuaciones de las alturas del triángulo que determinan los puntos $A=(1,0)$, $B=(-3,2)$ y $C=(-1,-2)$ y determina el ortocentro. Sol: $2x-y=0$; $x+y+1=0$; $-x+2y+1=0$; $(-1/3,-2/3)$

9.- En el triángulo de vértices $A=(3,6)$ y $B=(5,2)$ y $C=(1,-2)$. Determina: a) el baricentro; b) el ortocentro; c) el circuncentro. Sol: a) $(3,2)$; b) $(23/3,4/3)$; c) $(2/3,7/3)$

10.- Busca una recta r que determine con las rectas $x-2y+2=0$ y $2x-y-2=0$ un triángulo isósceles que tenga el baricentro en el punto $G=(1,1)$. Sol: $x+y=1$

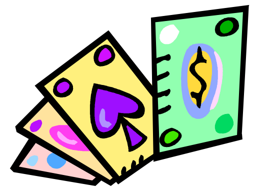
11.- Calcula el área del triángulo formado por las rectas $3x+y-8=0$; $5x-3y+10=0$ y $x-2y+2=0$. Sol: 7

12.- Encuentra las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices: $A=(1,1)$, $B=(1,-3)$ y $C=(3,5)$. Sol: $3x-y=4$; $y=1$; $6x-y=9$

Manejo de la información.

Análisis de la información.

Eventos independientes.



Eventos Independientes
Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia del otro evento (o eventos). Un caso típico de eventos independiente es el muestreo con reposición, es decir, una vez tomada la muestra se regresa de nuevo a la población donde se obtuvo. Ejemplo: lanzar al aire dos veces una moneda son eventos independientes por que el resultado del primer evento no afecta sobre las probabilidades efectivas de que ocurra cara o sello, en el segundo lanzamiento

Distinguir en diversas situaciones de azar eventos que son independientes, así como a determinar la forma en que se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de dos o más eventos independientes.

Ejemplo:

Una persona tiene una moneda y en unos momentos va a lanzarla al aire y por supuesto existe la incertidumbre sobre el resultado de tal acción, veamos la interpretación de cada uno de los términos.

Experimento: lanzar una moneda.

Evento: Cada una de las respuestas de esta actividad, el evento uno será Sol y el evento dos será Águila.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento se llama espacio muestral.

Se representa con la letra S.

S= Águila, Sol.

Preguntas:

¿Águila y Sol son eventos mutuamente excluyentes?

Si porque sólo puede salir una cara de la moneda, ya sea sol o sea águila pero no ambas.

Equiprobabilidad:
El concepto de equiprobabilidad sugiere que si no hay razón para favorecer ninguno de los posibles resultados de un experimento, entonces los resultados deben ser considerados IGUALMENTE PROBABLES de ocurrir.

P(águila) = P (sol)

Fórmula de probabilidad marginal:

P (evento) = número de casos favorables para el evento / número total de resultados del experimento.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad que en un tiro de una moneda aparezca águila?

P (águila) = $\frac{(}{(}$

P (águila) = − = 0.5 = 50% la probabilidad se puede expresar en decimales, porcentajes o fracciones.

Veamos el ejemplo en un dado.

El espacio muestral será de
S= 1, 2, 3, 4, 5,6

¿Cuál es la probabilidad de que caiga un número par de ese dado?
Seleccionemos los pares.
S= 1, 2, 3, 4, 5,6

Tenemos que la probabilidad es:
P (pares dado) = $\frac{(}{(}$

P (pares dado) = − = − = 0.5 = 50%

¿Cuál es la probabilidad de que caiga el número 3 de ese dado?

P (# 3) = $\frac{(}{(}1$

P (# 3) = − = 0.16 = 16%.

Probabilidad bajo condiciones de independencia estadística.

Cuando ocurren dos eventos el resultado del primero PUEDE O NÓ tener un efecto en el resultado del segundo evento, es decir, los eventos pueden ser tanto dependientes o independientes.

Eventos estadísticamente independientes.

Son aquellos en los cuales la ocurrencia de un evento NO tiene efecto en la probabilidad de la ocurrencia de cualquier otro evento.

Existen 3 tipos de probabilidad bajo la condición de independencia estadística:

Marginal: Probabilidad individual significa que sólo puede tener lugar un evento.

P (sol) = −

Conjunta: Es la probabilidad de que 2 o más eventos independientes ocurran junto o en sucesión, es el producto de sus probabilidades marginales.

Fórmula:
P (AB) = P(A) * P (B)
P (ab) = probabilidad de que los eventos a y b ocurran juntos o en sucesión.
P (a)= probabilidad marginal de a.
P (b)= probabilidad marginal de b.

Ejemplo: Si lanzamos 2 veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 águilas (águila y águila)?
S= Moneda 1 águila, sol.
Moneda 2 águila, sol.

P (águila) P (águila) * P (águila) = (−) (−) = −

Condicional: Es aquella en la cual la probabilidad de un evento se encuentra condicionada a la ocurrencia de otro evento.

P (B/A) = P (B)
Se lee: “la probabilidad del evento B si el evento ha ocurrido”.

Determina el espacio muestral de los siguientes experimentos:
1. Se lanza un dado y se observa que número de aparece en la cara superior.

2. Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas

3. El ala de un aeroplano se arma con un gran número de remaches. Se cuenta el número de remaches defectuosos.

4. Se fabrican artículos hasta llegar a producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.

5. De una urna que contiene solamente esferas negras, se toma una esfera y se anota su color.

6. Se fabrican artículos de una línea de producción y se cuentan el número de artículos defectuosos producidos en 24 hs.

7. En un bolillero hay 20 bolillas blancas y 5 azules:
Calcula la probabilidad de sacar una blanca

a) Calcula la probabilidad de sacar una azul

b) Calcula la probabilidad de sacar una blanca o una azul

8. Al arrojar dos dados, uno blanco y uno negro, calcular la probabilidad de obtener ocho puntos entre los dos.

9. Se lanza una moneda tres veces. Descubrir el espacio muestral y calcular la posibilidad de sacar tres caras.

10. Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres de los cuales la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres, tienen los ojos castaños.
Hallar la probabilidad que una persona tomada al azar, sea hombre o tenga los ojos castaños.

11. En un bolillero hay 15 bolillas rojas, 6 blancas y 7 azules. Se quiere se quiere saber cuál es la probabilidad al extraer una, de obtener indistintamente i bolilla roja o una blanca.

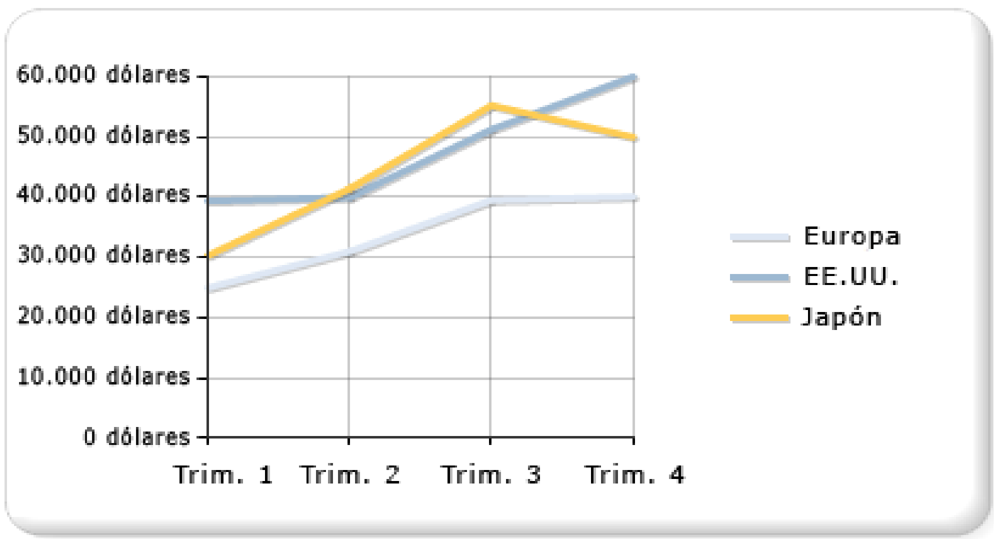
12. Si se arrojan dos monedas, calcular la probabilidad de sacar 2 caras o dos cecas.

Representación de la Información.

Gráficas de líneas.

Aquí aprenderás a interpretar y utilizar dos o más gráficas de línea que representan características distintas de un fenómeno o situación para tener información más completa y en su caso tomar decisiones.

Gráficas de líneas.
Las gráficas de líneas muestran una serie como un conjunto de puntos conectados mediante una sola línea. Los gráficos de líneas se usan para representar grandes cantidades de datos que tienen lugar durante un período continuado de tiempo. Para obtener más información sobre cómo agregar datos a un gráfico de líneas, vea la ilustración siguiente, que muestra una gráfica de líneas que contiene tres series.



Variaciones
Línea suavizada. Gráfica de líneas que usa una línea curva en lugar de una línea normal.
Línea escalonada. Gráfica de líneas que usa una línea escalonada en lugar de una línea normal. La línea escalonada conecta puntos mediante una línea que adopta el aspecto de los peldaños de una escalera.

Consideraciones sobre los datos para las gráficas de líneas
Para mejorar el impacto visual de la gráfica de líneas predeterminado, considere la posibilidad de cambiar el ancho del borde de la serie a 3 y agregar un desplazamiento de sombra de 1. Esto creará un gráfico de líneas mucho más oscuro. Deberás revertir estas propiedades a sus valores originales si cambia el tipo de gráfico de línea por otro.

Si el conjunto de datos incluye valores vacíos, el gráfico de líneas agregará puntos vacíos en forma de líneas de marcador de posición para mantener la continuidad en el gráfico. Si no desea ver estas líneas, considere la posibilidad de mostrar el conjunto de datos usando un tipo de gráfico no contiguo, como un gráfico de barras o de columnas.

Una gráfica de líneas requiere al menos dos puntos para dibujar una línea. Si el conjunto de datos solo tiene un punto de datos, la gráfica de líneas se mostrará como un marcador de punto de datos único.

Una serie que se dibuja como una línea no ocupará mucho espacio dentro de un área de gráfico.

Por este motivo, los gráficos de líneas se combinan con frecuencia con otros tipos de gráficos, como los gráficos de columnas. Sin embargo, no se puede combinar un gráfico de líneas con los tipos de gráficos siguientes: barras, polar, circular o de formas.

Realiza los siguientes ejercicios:

1. En las últimas décadas, el automóvil ha aparecido de forma masiva en las ciudades, lo cual ha incrementado los problemas de contaminación atmosférica debido a los gases contaminantes que se emiten por los tubos de escape. Los principales contaminantes lanzados por los automóviles son monóxido de carbono (CO), óxidos de nitrógeno (NO_x), hidrocarburos no quemados (HC) y compuestos de plomo.

Según el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), en la Zona Metropolitana del Valle de México la presencia de partículas CO y NO_x ha variado de la siguiente forma:

Año	CO(Toneladas al año)	NO_X (Toneladas al año)
1994	1 679 889	192 391
1996	1 832 091	204 795
1998	1 960 801	205 726
2000	2 035 425	193 451
2002	1 941 223	186 169

Grafica los siguientes puntos para poder trazar bien los puntos, recuerda que tienes que trazar una gráfica de línea.

Graficas formadas por rectas

Las gráficas se pueden clasificar en:

Numéricas: con imágenes visuales que sirven para representar el comportamiento o la distribución de los datos cuantitativos de una población.

Lineales: en este tipo de gráfico se representan los valores en dos ejes cartesianos ortogonales entre sí. Las gráficas lineales se recomiendan para representar series en el tiempo y es donde se muestran valores máximos y mínimos; también se utiliza para varias muestras en un diagrama.

De barras: que se usan cuando se pretende resaltar la representación de porcentajes de datos que componen un total. Una gráfica de barras contiene barras verticales que representan valores numéricos, generalmente usado una hoja de cálculo. Las gráficas de barras son una manera de representar frecuencias. Las frecuencias están asociadas con categorías. Una gráfica de barras se presenta de dos maneras: horizontal o vertical. El objetivo es poner una barra de largo (alto si es horizontal) igual a la frecuencia. La gráfica de barras sirve para comparar y tener una representación gráfica de la diferencia de frecuencias o de intensidad de la característica numérica de interés.

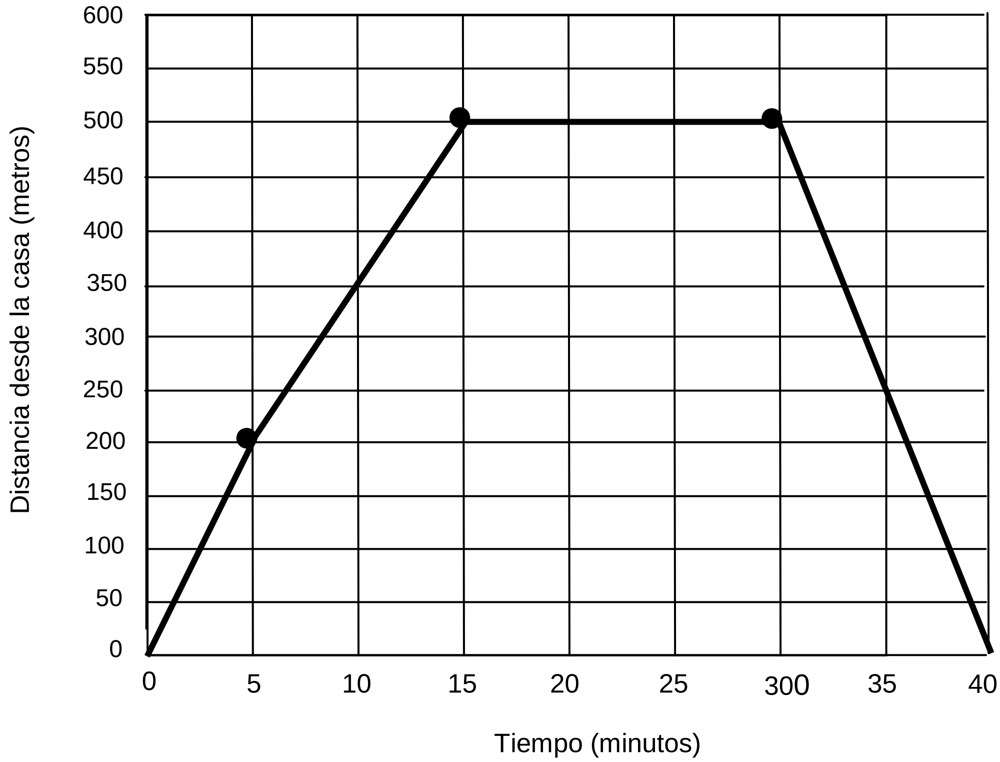
Gráficas Circulares: gráficas que nos permiten ver la distribución interna de los datos que representan un hecho, en forma de porcentajes sobre un total. Se suele separar el sector correspondiente al mayor o menor valor, según lo que se desee destacar.

Histogramas: Se emplea para ilustrar muestras agrupadas en intervalos. Está formado por rectángulos unidos a otros, cuyos vértices de la base coinciden con los límites de los intervalos y el centro de cada intervalo es la marca de clase, que representamos en el eje de las abscisas. La altura de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia del intervalo respectivo.

La representación gráfica también permite establecer valores que no han sido obtenidos experimentalmente, es decir, mediante: la interpolación (lectura entre puntos) y la extrapolación (valores fuera del intervalo experimental).

Realiza los siguientes ejercicios:

1. Analiza la siguiente gráfica que representa el recorrido que hizo Juan para realizar una compra. Posteriormente contesten lo que se pide.



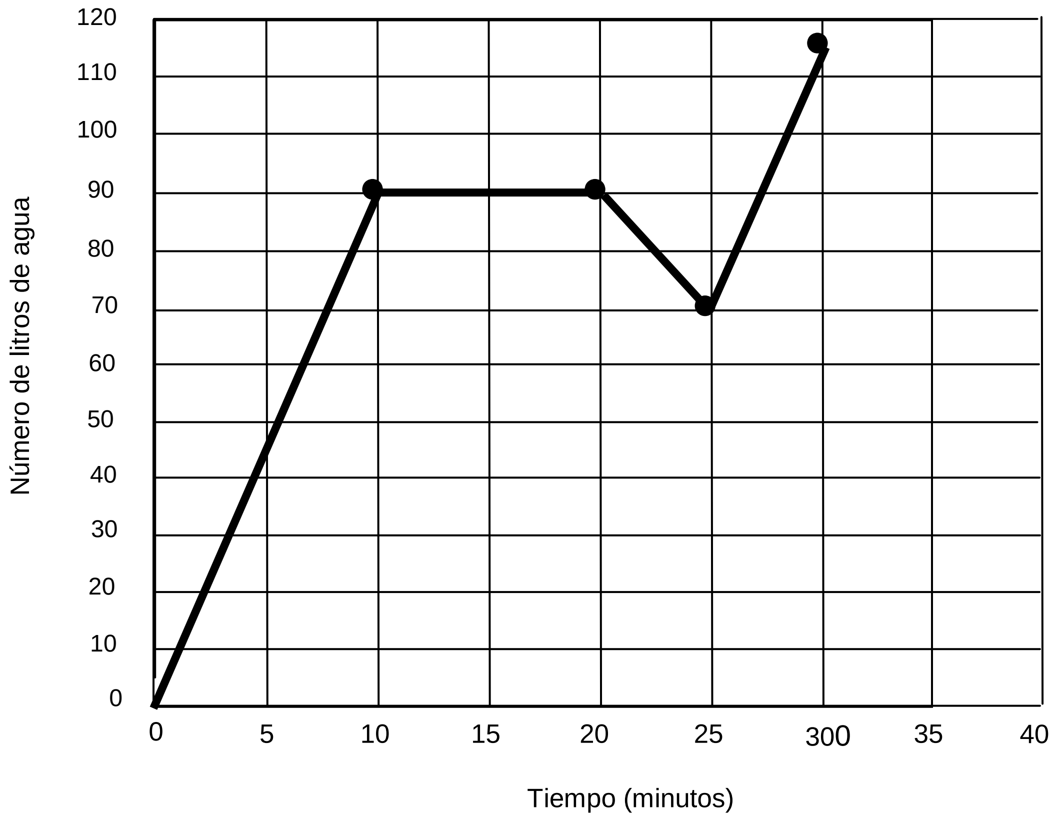
a) ¿A qué distancia de la casa de Juan queda la tienda?

b) ¿Cuánto tiempo tardó en hacer la compra?

c) ¿A qué velocidad se desplazó de la tienda a su casa?

d) Si llegó a las 11:30 horas a la tienda, ¿a qué hora salió de su casa?

2. Analiza la siguiente gráfica que representa la variación de la cantidad de agua en un tinaco de una casa, a partir de que se abre la llave de llenado, misma que permanece abierta y descarga 18 litros cada 2 minutos. Posteriormente contesta lo que se pide.



a) ¿Cuántos litros de agua tiene el tinaco al minuto 10?

b) ¿Por qué no es uniforme el llenado del tinaco?

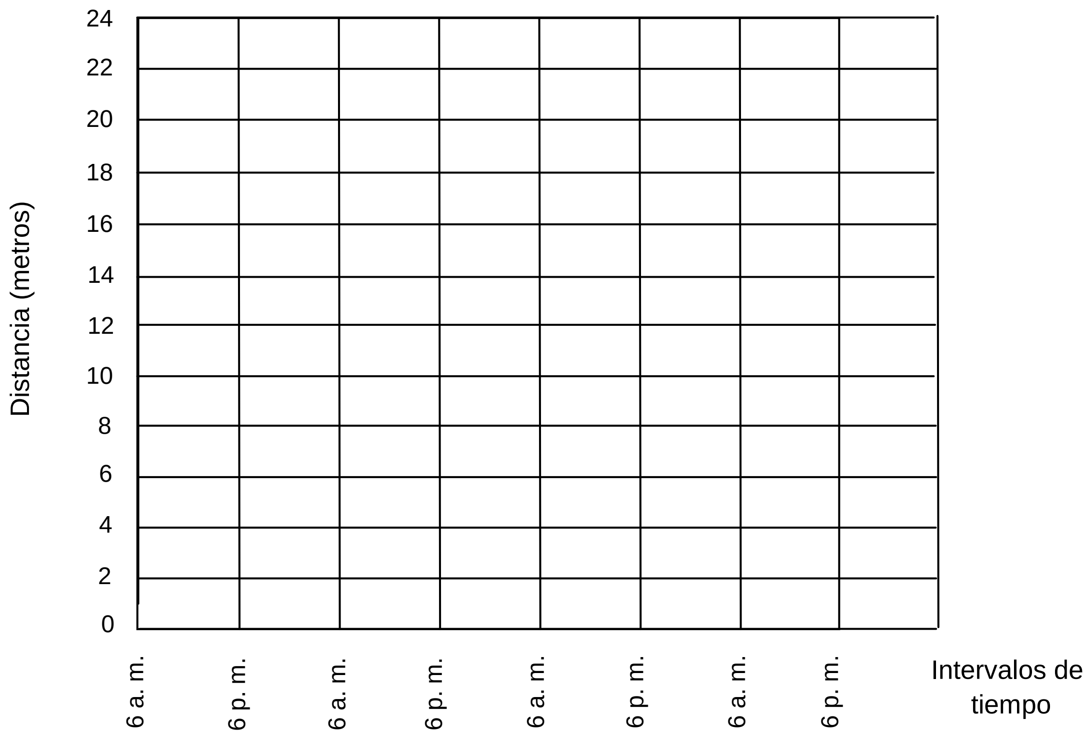
c) ¿En qué lapsos no se utiliza agua?

d) ¿Qué sucede con la cantidad de agua entre los minutos 10 y 20? ¿Por qué?

e) ¿Cuántos litros de agua se utilizaron entre los minutos 20 y 25?

3. Analiza la siguiente situación y realicen lo que se indica.

Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo que tiene 20 metros de profundidad. Durante el día (6 a.m. a 6 p.m.), avanza a razón de un metro por hora y durante la noche (6 p.m. a 6 a.m.), mientras duerme, se desliza hacia abajo a razón de 50 cm. Por hora. Elaboren una gráfica que ilustre el desplazamiento del caracol hasta que sale del pozo y determinen el tiempo que tardará en hacerlo.



Llena la siguiente tabla para construir la gráfica.

Intervalo	**Desplazamiento**	**Ubicación actual**
6 a. m. --- 6 p. m.	+ 12	+ 12
6 p. m. --- 6 a. m.	- 6	+ 6
6 a. m. --- 6 p. m.		

Autoevaluación Bloque 4.

Lee detenidamente cada situación, y en cada una de ellas tendrás 4 opciones. Realiza las operaciones en una hoja. Subraya con rojo la opción que creas correcta.

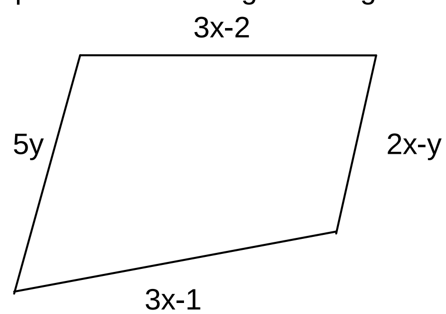
1.- ¿Cuál es el resultado de multiplicar 3^3 x 3^3?

a) 243 b) 30 c) – d) 729

2.- ¿Cuál es el resultado de operar $(2^3)^2$?

a) 8 b) 16 c) 32 d) 64

3.- ¿Cuál es el perímetro de la siguiente figura?



a) 6x - 4y +3 b) 8x + 4y +3 c) 8x + 4y -3 d) 8x + 4y -3

4.- Se quiere reproducir un triángulo cuya base mida 6cm; el ángulo que formará la base con el lado de la izquierda mide 45° y el ángulo que forma la base con el otro lado medirá 60°. ¿Qué criterio de congruencia se debe utilizar para construirlo?

a) Ángulo Ángulo Ángulo. b) Ángulo Lado Ángulo c) Lado Ángulo Lado. d) Lado Lado Lado.

5.- De acuerdo con los resultados de una encuesta sobre el tipo de películas preferidas, 1 de cada 5 personas eligen las de terror, 4 de cada 20 elige las cintas infantiles y 3 de cada 15 prefiere las comedias. ¿Cuál de los cuatro tipos de películas tiene la mayor proporción de preferencias?

a) Las de acción b) Las comedias c) Las infantiles d) Las de terror

6.- En un centro deportivo hay una alberca para clavados. Si la alberca tiene capacidad de $729m^3$ y forma de cubo, ¿Cuál es la profundidad de dicha alberca?

a) 3.0 b) 9.0 c) 27.0 d) 121.5

7.- Miguel tiene \$27.00 y Luis tiene \$15.00. ¿Cuánto tendría que multiplicar Luis su dinero para tener lo mismo que Miguel?

a) 0.55 veces. b) 1.8 veces c) 6 veces d) 12 veces

8.- Para cubrir un piso se estaban colocando losetas en forma de hexágonos regulares pero se acabaron y quedaron algunos huecos. ¿Con qué tipo de figuras regulares se puede complementar el piso, sin hacer cortes a las nuevas losetas?

a) Octágonos b) Pentágonos c) Cuadrados. d) Triángulos

9.- Una compañía telefónica cobra una renta mensual de \$100 por 100 llamadas posteriormente una tarifa de \$1.50 por cada llamada extra. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas refleja mejor la situación de cobro mensual?

a) $y = 100 + 1.5x$ b) $y = 100 + 50x$ c) $y = 100 + 150x$ d) $y = 100 + 50(1.5x)$

10.- Juan elaboró un cubo cuadrangular de volumen igual a 125m. Si Pedro quiere construir una pirámide recta que tenga la misma área de la base y altura del prisma que elaboró Juan, ¿cuánto debe medir la altura de la pirámide?

a) 5 cm b) 15 cm c) 25 cm d) 75 cm

11.- En un deportivo se tiene el proyecto de construir una alberca rectangular con una capacidad de 450 m^3, si la base mide 9m de ancho y 25m de largo, ¿Cuál debe ser la profundidad de la alberca?

a) 34m b) 2m c) 16m d) 9m

12.- La suma de dos compras es \$ 200. Si el doble de la primera compra menos la segunda es 40, ¿Cuál es la expresión que resuelve cuánto se pagó por cada una de las compras?

a) $x + y = 200$	b) $x - 2y = 200$	c) $x + y = 200$	d) $x + y = 200$
$40x - y = 2$	$x + y = 40$	$x + 2y = 40$	$2x - y = 40$

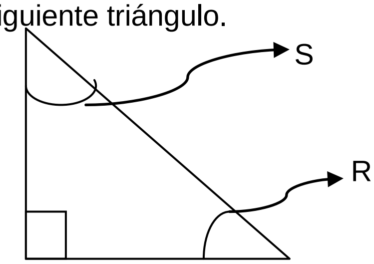
13.- Juan tiene para entrenar atletismo 6 pants y 2 pares de tenis, ¿Cuántas combinaciones distintas puede hacer Juan para vestirse y entrenar atletismo?

a) 2 b) 6 c) 8 d) 12

14.- Considera las medidas dadas. Si se sabe que ambas figuras tienen el mismo perímetro, ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta?

a) ab= — b) $a + b = 2b + c$ c) $a + b = 2(b+c)$ d) $2(a+b) = 2(b+c)$

15.- Observa el siguiente triángulo.



Si el ángulo R mide 30°, ¿Cuál es la medida del ángulo 5?

a) 90° b) 60° c) 120° d) 180°

Bloque 5

Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Significado y uso de las literales.

Sistemas de ecuaciones.

Aquí aprenderás a recordar y a representar con literales los valores desconocidos de un problema y las usarás para plantear y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.

Método de igualación para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Para resolver un sistema de ecuaciones por este método, hay que despejar una misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo cual se obtiene una ecuación de primer grado. Las fases del proceso son las siguientes:
a.- Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
b.- Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación de una incógnita que resulta.
c.- Se calcula el valor de la otra incógnita sustituyendo la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas del primer paso.

Ejemplo: Resolver el sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 90 \\ 2x + 2y = 70 \end{cases}$$

Despejando y en cada una de las ecuaciones, resulta el sistema:

$$\begin{cases} y= \text{———} \\ y = \text{———} \end{cases}$$

Al igualar las expresiones obtenidas, tenemos que ——— ——— resolviendo la ecuación de una incógnita.

——— ———

2x(90-3x) = 2x (70 -2x)
180 - 6x = 140 – 180
-6x + 4x = 140 – 180
-2x = - 40
x = —— = 20
x = 20
Sustituyendo x = 20 en la primera ecuación, queda

y = ——— (——— ——— —— = 15 Finalmente la solución del sistema es x = 20 y = 15

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. La suma de dos números es 40 y su diferencia es 10. Halla dichos números.

2. Dos ángulos son complementarios y la diferencia entre ellos es 40°. ¿Cuál es el valor de cada uno?

3. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 18° mayor que el otro.
¿Cuánto mide cada ángulo del triangulo?

4. Dos ángulos son suplementarios y su diferencia es 70°. Encuentra el valor de tales ángulos.

5.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 2x + y = -70 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Método de sustitución

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

2. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

3. Se resuelve la ecuación.

4. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1) Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$$2x = 16 - 4y \qquad\qquad x = 8 - 2y$$

2) Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$$3(8 - 2y) - 4y = -6$$

3) Resolvemos la ecuación obtenida:

$$24 - 6y - 4y = -6 \qquad -10y = -30 \qquad y = 3$$

4) Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

$$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 \qquad\qquad x = 2$$

5) Solución

$$x = 2, \quad y = 3$$

Método de igualación

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

3. Se resuelve la ecuación.

4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

1) Despejamos, por ejemplo, la incógnita **x** de la primera y segunda ecuación:

$$3x = -6 + 4y \qquad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \qquad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

2) Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 - 4y}{2}$$

3) Resolvemos la ecuación:

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \qquad -12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12 \qquad 20y = 60 \qquad y = 3$$

4) Sustituimos el valor de **y**, en una de las dos **expresiones** en las que tenemos **despejada la x**:

$$x = \frac{-6 + 4 \cdot 3}{3} = \frac{-6 + 12}{3} \qquad x = 2$$

5) Solución:

$$x = 2, \quad y = 3$$

Método de reducción (suma y resta)

1. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

2. La restamos, y desaparece una de las incógnitas.

3. Se resuelve la ecuación resultante.

4. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Lo más fácil es suprimir la y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \xrightarrow{x2} \\ 2x + 4y = 16 \xrightarrow{x(-3)} \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \cancel{-6x} - 12y = -48 \end{cases}$$

$$-20y = -60 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$$2x + 4 \cdot 3 = 16 \qquad 2x + 12 = 16 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$$

Solución:

$$x = 2, \ y = 3$$

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Método de Gauss

Este método consiste en utilizar el **método de reducción** de manera que **en cada ecuación tengamos una incógnita menos que en la ecuación precedente**.

1º Ponemos como **primera ecuación** la que tenga como **coeficiente de x: 1 ó -1**, en caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

2. Hacemos **reducción con la 1ª y 2ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x de la 2ª ecuación**. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:

3. Hacemos lo mismo con la ecuación **1ª y 3ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x**.

4. Tomamos las ecuaciones **2ª y 3ª**, trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

5. Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

6. Encontrar las soluciones.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1) Ponemos como **primera ecuación** la que tenga como **coeficiente de x: 1 ó -1**, en caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

2) Hacemos **reducción con la 1ª y 2ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x de la 2ª ecuación**. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación:
$\mathbf{E'_2 = E_2 - 3E_1}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ \underline{-3x - 3y + 3z = -3} \end{cases}$$
$$- y + 4z = -2$$

3) Hacemos lo mismo con la ecuación **1ª y 3ª ecuación**, para **eliminar** el término en **x**.

$E'_3 = E_3 - 5E_1$

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2 \\ \underline{-5x - 5y + 5z = -5} \end{cases}$$
$$-2y + 9z = -3$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{cases}$$

4) Tomamos las ecuaciones **2ª y 3ª**, trasformadas, para hacer reducción y **eliminar** el término en **y**.

$E''_3 = E'_3 - 2E'_2$

$$\begin{cases} -2y + 9z = -3 \\ \underline{2y - 8z = 4} \end{cases}$$
$$z = 1$$

5) Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

6) Encontrar las soluciones.

$z = 1$

$-y + 4 \cdot 1 = -2$ **$y = 6$**

$x + 6 - 1 = 1$ **$x = -4$**

Sistemas de ecuaciones no lineales

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el **método de sustitución**, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Se **despeja una incógnita** en una de las ecuaciones, preferentemente en **la de primer grado**.

2. Se sustituye el valor de la incógnita despejada **en la otra ecuación.**

3. Se resuelve la ecuación resultante.

4. Cada uno de l**os valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación**, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

Ejemplo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el **método de sustitución**, para ello seguiremos los siguientes pasos:

1) Se **despeja una incógnita** en una de las ecuaciones, preferentemente en **la de primer grado**.
$y = 7 - x$

2) Se sustituye el valor de la incógnita despejada **en la otra ecuación.**
$x^2 + (7 - x)^2 = 25$

3) Se resuelve la ecuación resultante.
$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$
$2x^2 - 14x + 24 = 0$
$x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{matrix}$$

4) Cada uno de l**os valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación**, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

x = 3	$y = 7 - 3$	**y = 4**
x = 4	$y = 7 - 4$	**y = 3**

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Se quiere mezclar un vino de $ 600. 00 el litro con otro de $350.00 el litro, de modo que resulte un vino que tenga un precio de $500.00 el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?

2. A las tres de la tarde sale de la ciudad un coche con una velocidad de 80 kilómetros por hora. Dos horas más tarde sale una moto en su persecución a una velocidad de 120 kilómetros por hora. ¿A qué hora lo alcanzará? ¿A qué distancia de la ciudad?

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por los métodos de sustitución (de los ejercicios 1 al 5, por igualación los ejercicios del 6 al 10 y por reducción del ejercicio 11 al 16).

1. $x + y = 14$
   $x - y = 6$

2. $2x - 3y = - 14$
   $3x + 3y = 39$

3. $- 4x - 4y = 30$
   $4x + 5y = - 44$

4. $5x + y = 8$
   $4x + y = 6$

5. $6x + 4y = 14$
$6x - 3y = -21$

6. $3x + 5 = y$
$y - 11 = 6x$

7. $4x + 0.3y = 16.9$
$0.5x - 3y = -7$

8.
$$0.2x + 5y = 7$$
$$0.3x + 0.4y = 3.4$$

9.
$$2(x + y) - 4 = 10 - x$$
$$0.3x + 0.4y = 3.4$$

10.
$$4x - 2y + 8 = 8y - 6x - 2$$
$$3(x - y + 1) = 3y - 2x - 9$$

11. $2(x + y) = 3(x - y)$
$3y = x + 2$

12. $2(3x - 4y) = 38$
$3(2x + 3y) + 4 = 5x$

13. $(x - y) - (6x + 8y) = -(10x + 5y + 3)$
$(x + y) - (9y - 11x) = 2y - 2x$

14. $x(y - 2) - y(x - 3) = -14$
$y(x - 6) - x(y + 9) = 54$

15. $3x - 4y - 2(2x - 7) = 0$
$5(x - 1) - (2y - 1) = 0$

16) $5x - 0.5 = 5y + 0.5$
$8y + 3 = 4x + 9$

Manejo de la Información.

Representación de la Información.

Representación gráfica de sistemas de ecuaciones

Principio del formulario

Resolución y representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

Resolvemos gráficamente el sistema x + y = 6; x - y = 2}

Despejamos *y* en las dos ecuaciones.

$x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x$

$x - y = 2 \rightarrow y = x - 2$

Dando valores a *x*, formamos una tabla de valores para cada una de las dos ecuaciones.

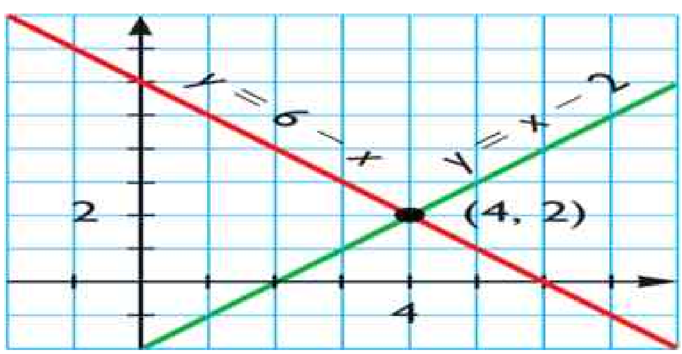
$y = 6 - x$

x	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2

$y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y	-2	-1	0	1	2

Representamos estos puntos sobre un sistema de ejes



Uniendo los puntos de cada ecuación, obtenemos dos rectas que representan todas las soluciones de cada una de las ecuaciones.

Puede ocurrir uno de los siguientes casos:

Si las rectas no se cortan, es decir, son paralelas, el sistema es incompatible, no tiene solución.

Si las rectas se cortan en un punto, el sistema tiene solución única. Decimos que es compatible determinado.

Si las dos rectas coinciden en todos los puntos, esto es, son la misma, el sistema tiene infinitas soluciones. Es un sistema compatible indeterminado.

En nuestro caso, las rectas se cortan en el punto (4, 2). La solución del sistema es $x = 4$ e $y = 2$.

Clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en solución única, infinita o indeterminada. 1.Resuelve por cualquiera de los 3 métodos para saber la solución.

a) 2 x + y = 6
2 x - y = 2

b) x + y = 3
2 x + 2 y = 6

c) x + y = 3
x + y = - 1

a) Dibujamos las rectas que representan las soluciones de cada ecuación: Dos soluciones de la primera ecuación son:
$x = 1$, $y = 4$; $x = 2$, $y = 2$

Dos soluciones de la segunda ecuación son:
$x = 1$, $y = 0$; $x = 2$, $y = 2$

Las rectas se cortan en un punto que será la solución: $x = 2$, $y = 2$. Por tanto, el sistema será **compatible determinado**. Vemos la representación en el margen.

b) Dibujamos las rectas que representan las soluciones de cada ecuación: Dos soluciones de la primera ecuación son:
$x = 0$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 0$

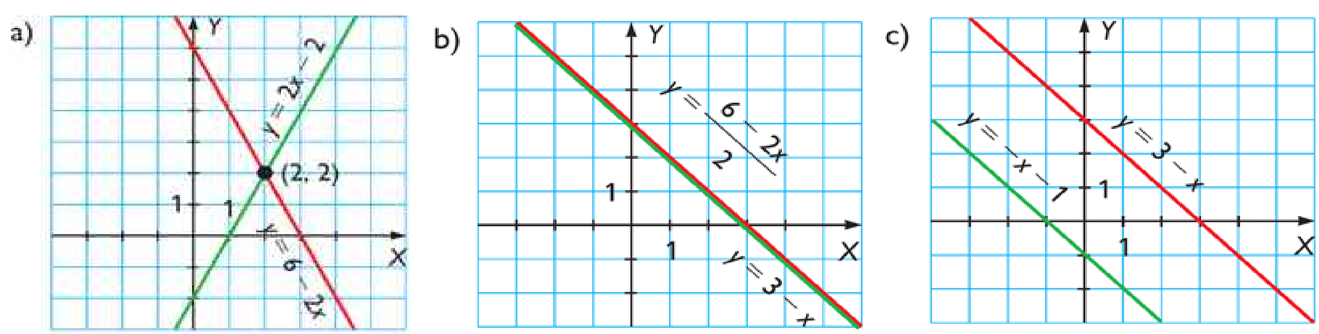
Dos soluciones de la segunda ecuación son:
$x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$

Las rectas coinciden, toda la recta es solución del sistema (infinitas soluciones). Por tanto, el sistema será **compatible indeterminado**. Vemos la representación en el margen.

c) Dibujamos las rectas que representan las soluciones de cada ecuación: Dos soluciones de la primera ecuación son:
$x = 0$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 0$

Dos soluciones de la segunda ecuación son:
$x = 0$, $y = -1$; $x = -2$, $y = 1$

Las rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común, luego el sistema no tiene solución. Por tanto, el sistema será **incompatible**. Vemos la representación siguiente:



Para cada uno de los siguientes ejercicios, resuelve por los 3 métodos (sustitución, igualación, reducción y gráficamente), los sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

2. $$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = x - 1 \\ \dfrac{x-y}{2} = y + 1 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$

4. $$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \dfrac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$$

5. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ \dfrac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$

7. $$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \dfrac{y-1}{2} = 0 \\ \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{x+y+2}{4} = 0 \end{cases}$$

Autoevaluación Bloque 5.

Lee detenidamente cada situación, y en cada una de ellas tendrás 4 opciones. Realiza las operaciones en una hoja. Subraya con rojo la opción que creas correcta.

1.- La solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales es:

$x + y = 5$
$xy = 4$

a) (1,4) o (4,1) b) (1,5) o (5,1) c) (1,3) o (3, 1) d) (1,2) o (2,1)

2.- La solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución es:

$3x - 4y = -6$
$2x + 4y = 16$

a) x = 2, y=3 b) x= 1, y=4 c) x= 5, y= 6 d) x= 7, y = 9

3.- El alimento destinado para 50 animales en un corral dura 20 días, ¿cuántos días duraría la misma cantidad de alimento si fueran 100 animales?

a) 5 b) 10 c) 40 d) 70

4.- Un profesional técnico gana $155 por 2 horas de trabajo, ¿cuántas horas trabajó si ganó $3100 en el mes?

a) 4 b) 10 c) 40 d) 100

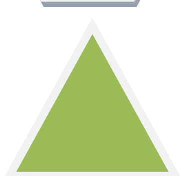
5.- Un avión vuela a 200 pies de altura y empieza a elevarse a 40 pies por minuto. ¿Cuál de las expresiones representa la altura del avión?

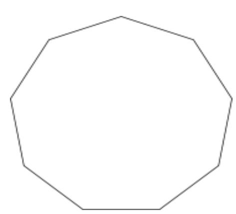
a) $h = 40t + 200$ b) $h = 40t - 200$ c) $h = 200 - 40t$ d) $h = (200 + 40)t$

6.- Con los siguientes polígonos se puede teselar un plano, excepto:

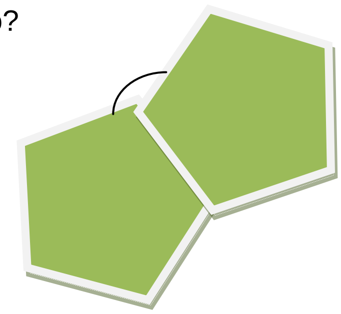
a) 

b) 

c) 

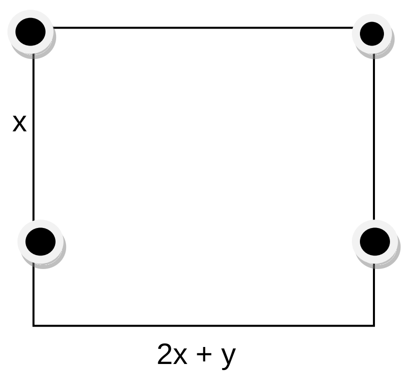
d) 

7.- Determinar el ángulo que se forma entre los dos pentágonos. ¿Cuál de las opciones muestra la medida del ángulo?



a) 72° b) 54° c) 108° d) 144°

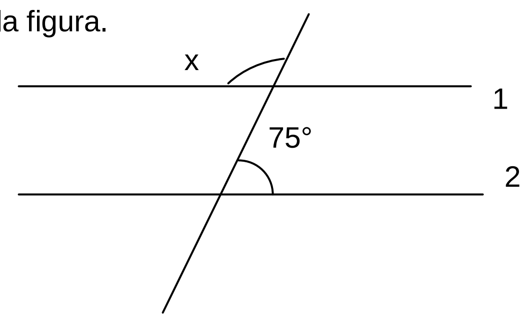
8.- Observa la figura



La diferencia entre sus lados es de 2 centímetros y su perímetro mide 28 centímetros, ¿Cuál es el valor de y en la figura?

a) 3 b) 6 c) -4 d) -8

9.- Observa la figura.



Las rectas 1 y 2 son paralelas entre sí, ¿Cuál es la medida del ángulo señalado con x?

a) 115° b) 105° c) 75° d) 15°

10.- ¿de cuantos elementos consta el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar dos monedas al mismo tiempo?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

11.- Si tengo en una caja 10 canicas blancas, 20 negras y 25 rojas, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una blanca o negra?

a) —　　b) —　　c) ——　　d) —

12.- Lee con atención la información y contesta los siguientes dos reactivos.
En la tabla se presenta el número de aciertos que unos estudiantes obtuvieron en un examen de 20 preguntas.

Número de aciertos	Frecuencia de alumnos que obtuvieron el número de aciertos	Calificación
6	3	4
8	4	5
10	5	6
12	6	7
16	8	8
18	3	9
20	2	10

¿Cuál es la mediana de los aciertos que obtuvo el grupo?

a) 6　　b) 7　　c) 9　　d) 12

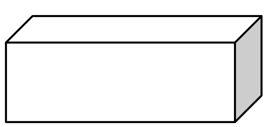
13.- ¿Qué moda tuvo el grupo en cuanto a la calificación?

a) 2　　b) 8　　c) 16　　d) 20

14.- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres veces una moneda al aire, las tres sean águila?

a) –　　b) —　　c) –　　d) –

15.- Teniendo un prisma como el siguiente:



¿Cuál de las siguientes aseveraciones es correcta?

a) Tiene 3 caras　　b) Tiene 7 vértices　　c) Tiene 8 vértices　　d) Tiene 9 aristas

Referencias

Bibliográficas

Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México, D.F. Trillas. 1965.

Wentworth, Jorge y David Eugenio Smith. *Geometría plana y del espacio.* México, D.F. Porrúa 19ª ed. 1995. 469pp.

Secretaría de Educación Pública (2009). *Plan y programa de estudios 2009*. *Educación básica. Segundo grado. Secundaria.* México.

Secretaría de Educación Pública (2007). *Matemáticas II, Libro para el maestro, Telesecundaria.* México.

Digitales

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_primer_grado/index.htm

http://www.disfrutalasmatematicas.com

Secretaría de Educación Pública (2010). *Generador de exámenes tipo ENLACE.* Recuperado en julio de 2011.

Secretaría de Educación Pública (2007). *Matemáticas II, Libro para el maestro, Telesecundaria.* México. Recuperado en julio de 2011.

Buscador de imágenes de Google. Recuperado en julio de 2011.
http://google.com.mx

Usa el coco. Recuperado en julio de 2011.
http://usaelcoco.com

The Math Worksheet Site.com. Recuperado en julio de 2011.
http://themathworksheetsite.com

Mamut matemáticas. Recuperado en julio de 2011.
http://www.mamutmatematicas.com/ejercicios