Apuntes de Teoría de Números

Gilberto Reynoso Meza
greynosom@gmail.com
http://homepages.mty.itesm.mx/al768288

Versión Junio 2005

Índice general

1

Aritmética y Divisibilidad

1.1. El conjunto de los números reales

- Dígitos:$1, 2, 3, 4....., 9, 0$.
- Naturales:$1, 2, 3, 4, 5, ...$
- Enteros:$...., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$
- Racionales: Los números de la forma m/n donde m y n son enteros ($n \neq 0$).
- Irracionales: Números que no pueden expresarse de la forma m/n con m, n enteros ($n \neq 0$).
- Reales: Racionales + Irracionales.
- Primos: un número es primo si solamente tiene dos divisores positivos: el 1 y él mismo.

1.2. Teoremas fundamentales

1.2.1. Teorema fundamental de la aritmética

Todo número entero puede representarse de manera única como producto de primos (exceptuando el orden en el que aparecen los mismos), es decir, dado un número m este puede escribirse como:

$$m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} .... p_t^{n_t} \tag{1.1}$$

1.2.2. Teorema fundamental de la divisibilidad

Si a es un entero positivo y b es cualquier entero, entonces existe una única pareja de enteros positivos q y r tales que:

$$b = aq + r \quad donde \quad a > r \geq 0 \tag{1.2}$$

Las propiedades que presenta la divisibilidad son las siguientes:

- Si $a|b$ y $b|a$ entonces $|b| = |a|$ (simetría).
- Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$ (transitividad).
- Si $a|b$ entonces $a|mb$.
- Para cualquier entero a , $a|0$.
- Para ningún entero a, $0|a$.
- Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(mb \pm nc)$ con m, n enteros.

1.2.3. Máximo común divisor (MCD)

Dados tres enteros positivos a,b,d, si se observa que d cumple con las siguientes propiedades:

- $d|a$ y $d|b$.
- Si $d_1|a$ y $d_1|b$, entonces $d_1|d$.
- $d > 0$

Se dice entonces que d es el máximo común divisor de a, b, es decir: $(a, b) = d$.

1.2.4. Mínimo común múltiplo [mcm]

El mínimo común múltiplo de dos números a,b es el entero positivo más pequeño tal que es múltiplo de a y b. Sea m el mínimo común múltiplo de a y b. La notación matemática para esta expresión es la siguiente: $[a, b] = m$.

1.3. Teoremas que ayudan

1. Si p es primo y $p|ab$, entonces $p|a$ ó $p|b$.
2. Si p es primo y $p|a^2$, entonces $p^2|a^2$.
3. Dada una ecuación $a = b \pm c$, con n tal que divida a a y a b, entonces n forzosamente divide a c.
4. Si $n|ab$ entonces sucede una de tres cosas:

- n divide al producto, pero no divide a los factores a, b por separado.
- n divide al menos a uno de los fatores a, b.
- n divide a ambos factores a, b.

5. Sean a,b dos enteros con descomposición factorial: $a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots . p_t^{a_t}$ y $b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots . p_t^{b_t}$, entonces, la descomposición factorial de su máximo común divisor es:

$$d = p_1^{min(a_1,b_1)} \ldots p_r^{min(a_r,b_r)}$$

y la de su mínimo común múltiplo es:

$$m = p_1^{max(a_1,b_1)} \ldots p_r^{max(a_r,b_r)}.$$

6. Criterios de divisibilidad

a) Un número es divisible por 2 siempre que la cifra de sus unidades sea 0,2,4,6 u 8.

b) Un número es divisible por 3 siempre que la suma de sus cifras sea un múltiplo de 3.

c) Un número es divisible por 4 siempre que el número formado por sus dos últimas cifras sea un múltiplo de 4.

d) Un número es divisible por 5 siempre que la cifra de sus unidades sea 0 ó 5.

e) Un número es divisible por 6 siempre que se compruebe sea divisible por 2 y 3.

f) Un número es divisible por 7 siempre que al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 2, restarla del número que quedó suficiente de veces el resultado es un múltiplo de 7.

g) Un número es divisible por 8 siempre que el número formado por sus tres últimas cifras sea un múltiplo de 8.

h) Un número es divisible por 9 siempre que la suma de sus cifras sea múltiplo de 9.

i) Un número es divisible por 10 siempre que la cifra de sus unidades sea 0.

j) Un número es divisible por 11 siempre que el valor absoluto de la diferencia de la suma de sus cifras que ocupan lugar par y de las que ocupan lugar impar sea múltiplo de 11.

k) Un número es divisible por 12 siempre que se compruebe es divisible por 3 y 4.

l) Un número es divisible por 13 siempre que al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 9, restarla del nmero que quedó suficiente de veces el resultado es un mltiplo de 13.

m) Un número es divisible por 17 siempre que al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 5, restarla del número que quedó suficiente de veces el resultado es un mltiplo de 17.

n) Un número es divisible por 19 siempre que al separar la cifra de las unidades, multiplicarla por 17, restarla del número que quedó suficiente de veces el resultado es un múltiplo de 19.

7. Sumatorias notables

   - $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   - $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   - $\sum_{i=1}^{n} a^i = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

8. Si p es primo, entonces p se puede expresar de las siguientes maneras:

   - $p = 3n \pm 1$
   - $p = 6n \pm 1$

9. La suma de n números consecutivos siempre es divisible por n.

1.4. Álgebra

1.4.1. Factorización y productos notables

Para a, b números reales y n en los naturales se cumple lo siguiente:

- $a^n - b^n = (a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}})(a^{\frac{n}{2}} - b^{\frac{n}{2}})$ para n par.
- $a^n \pm b^n = (a \pm b)(a^{n-1} \mp a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \mp ... + b^{n-1})$ para n impar.

Para a, b en lo reales y m, n naturales se cumple lo siguiente:

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

1.4.2. Leyes de exponentes

- $a^b a^c = a^{b+c}$
- $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$
- $(a^b)^c = a^{bc}$
- $\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$

1.5. Problemas propuestos

1. ¿Cuántos ceros hay al final de 1000!?

2. Encontrar un entero positivo n menor que 2100 tal que $n = p^3qr$, con p, q, r primos distintos y $r > 80$.

3. Calcular la suma de los 100 quebrados que se obtienen formando todos los cocientes de cada par de números de la siguiente lista: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

4. Si a y b son números positivos distintos que cumplen $a^2 + b^2 = 4ab$, hallar el valor de: $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

5. El producto de tres enteros mayores que 1 y distintos entre sí es 100. ¿Cuáles son los tres enteros?

6. Encontrar el mayor número entero que no tenga cifras repetidas y tal que el producto de sus cifras sea el cuadrado de otro número entero distinto de cero.

7. Encontrar todas la parejas p, q de números primos que satisfacen $p^2 - 2q^2 = 1$.

8. Encontrar cinco números enteros positivos (distintos entre sí) de manera que el residuo que resulte de dividir 1997^2 entre cualquiera de estos números sea igual a 1997. Demuestre que no pueden existir más de cinco tales enteros.

9. Demuestre que $n^3 - n$ es un entero múltiplo de 6.

10. Sea n un entero positivo. Demostrar que si $3n + 1$ es un cuadrado perfecto, $n + 1$ es la suma de tres cuadrados perfectos.

11. Demuestre que al sumarle 1 al producto de cuatro enteros consecutivos el resultado es un cuadrado perfecto.

12. Si A es un conjunto de números enteros del 1 al 10, llamemos P_a al producto de todos los elementos de A, y llamemos Q_a al producto de todos los enteros del 1 al 10 que no están en A. Encuentra el menor entero que puede obtenerse como resultado de dividir P_a entre Q_a.

13. Encuentra todos los naturales x para los cuales $2^{x-1}x - 2^x = 768$

14. Cuál es la última cifra del producto de todos los impares entre 1 y 2001?

15. Encuentra todos los primos p tales que $9p + 1$ es un cubo perfecto.

16. ¿Existe un número de 6 dígitos divisible por 11 cuyos dígitos son 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?

17. Encontrar el menor entero positivo tal que la suma de sus cifras es 2001 y el producto de sus cifras es 2^{751}.

18. Demuestra que $3(720^n - 30^n - 24^n + 1)$ es múltiplo de 2001 para todo entero positivo n.

19. Encuentra todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 o 7.

20. Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, 3, \cdots, n$ (tiene muchas monedas de cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

    a) En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.
    b) Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.
    c) Para cualesquiera dos cajas sucede que entre las dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.
    d) No existe una denominación talque todas las cajas tengan una moneda de esa denominación.

    ¿Para que valores de n puede el coleccionista hacer lo que se propone?

21. Prueba que de cualesquiera 12 enteros positivos consecutivos hay uno que es menor que la suma de sus divisores propios (son propios aquellos divisores de n que son mayores que 1 y menores que n).

22. Drini participa en un juego de mesa en el que en cada turno tiene que pagar \$100 y tirar un dado. Si cae 1 o 2, gana \$400; si cae 3 paga otros \$200; si cae 4 le devuelven sus \$100; y si cae 5 o 6 gana \$1000. Si inicialmente tiene \$2000, ¿es posible que en algún momento llegue a tener \$12000 exactamente?

23. ¿Existe algún entero n tal que $n!$ Sea múltiplo de 3^{100} pero no de 3^{101}?

24. Consideremos los números del 1 al 1000000 inclusive. Se calculan dos sumas: la suma de los números que tienen todos sus dígitos pares y la suma de los números que tienen todos sus dígitos impares. ¿Cuál es la suma mayor?

25. En el pizarrón se tienen escritos once números 1. Se permite tomar dos números y sumarle 1 a ambos, restarle 1 a ambos, o sumarle 1 a uno y restarle 1 al otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos en el pizarrón 11 números 10?

26. La suma $1 + 3 + 5 + \cdots + 27 + 29$ es una suma de 15 números impares consecutivos cuyo resultado es un cuadrado perfecto. Demuestra que existe una infinidad de sumas de 15 impares consecutivos tales que su resultado es un cuadrado perfecto.

27. Se tienen 14 números enteros (no necesariamente distintos) tales que al quitar cualquiera de ellos, los trece restantes se pueden separar en tres grupos con la misma suma.

    a) Demuestra que cada uno de los 14 números es múltiplo de 3.

    b) ¿Es posible que alguno de ellos no sea 0?

28. A cada uno de los vértices de un polígono de $2n$ lados se le asigna un número entero de manera que los números asignados a vértices consecutivos difieran en 1. Llamamos loma a un vértice cuyo número es mayor que los números de vértices adyacentes. Un valle es un vértice con un número menor que el de los vértices adyacentes. Demuestra que la suma de los números en las lomas menos la suma de los números en los valles es n.

29. ¿Cómo elegir enteros positivos n y k para que n^2+4k resulte ser un cuadrado perfecto?

30. Dado un número k de dos o más cifras, se forma otro entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k.

31. Demostrar que $(4 \cdot 10^{2004} + 5) \cdot (\overbrace{111\cdots 1}^{2004\, unos}) - \overbrace{999\cdots 9}^{2004\, nueves}$ es el cuadrado de un número entero.

2

Congruencias

Congruencia: decimos que dos números a y b son congruentes módulo n cuando $n|(a-b)$. Esto se denota de la siguiente forma: $a \equiv b\,(Mod\,n)$

Las principales propiedades de las congruencias son las siguientes:

1. Siempre se satisface $a \equiv a\,(mod\,n)$
2. Si $a \equiv b\,(mod\,n)$ entonces $b \equiv a\,(mod\,n)$, es decir, es simétrica.
3. Si $a \equiv b\,(mod\,n)$ y $b \equiv c\,(mod\,n)$ entonces $a \equiv c\,(mod\,n)$ Es decir, es transitiva.
4. Si $a \equiv b(modn)$ y $c \equiv d(modn)$ se tiene que $a+c \equiv b+d(modn)$ y que $ac \equiv bd(modn)$.

2.1. Principio de sustitución

Siempre es posible sustituir el congruente de un término en un sistema de congruencias sin alterar la congruencia original.

2.2. Simplificación de congruencias

Si $a \equiv b\,(Mod.\,c)$ y $c = p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}...p_t^{n_t}$ entonces: $\begin{cases} a \equiv b\,(Mod.\,p_1^{n_1}) \\ a \equiv b\,(Mod.\,p_2^{n_2}) \\ a \equiv b\,(Mod.\,p_3^{n_t}) \\ \quad ... \\ a \equiv b\,(Mod.\,p_t^{n_t}) \end{cases}$

2.3. Teoremas que ayudan

1. Cualquier número es congruente a la suma de sus cifras, módulo 3 y 9.
2. Todo número es congruente a la cifra de sus unidades módulo 10.

2.4. Problemas propuestos

1. Demostrar los criterios de divisibilidad.
2. Encontrar la última cifra distinta de cero de 100!
3. Para qué enteros positivos n, se cumple que $2^n - 1$ es divisible por 7?
4. Mostrar que $2^n + 1$ nunca es divisible por 7.
5. ¿En cuántas regiones dividen al plano k líneas si no hay dos paralelas ni tres concurrentes?
6. Hallar el producto de todos los divisores del número 19600.
7. Probar que en cualquier sucesión de 7 o más enteros siempre hay dos cuya suma o diferencia es divisible por 11.
8. Probar que para cualquier entero positivo n existe un entero positivo k tal que la suma $S(n,k) = n + (n+1) + (n+2) + \ + (n+k-1)$ es un cuadrado perfecto.
9. Encontrar todos los enteros positivos a tales que $(a+1)|(10a^3 - 3a^2 + a + 4)$
10. ¿Cuántas parejas de enteros positivos a,b con $a + b \leq 100$ satisfacen la ecuación: $\frac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b} = 13$?
11. ¿Cuántas colecciones de cuatro números enteros del 1 al 25 suman un múltiplo de 5?
12. Se tienen x, y, z enteros tales que $x^3 + y^3 - z^3$ es múltiplo de 7. Demostrar que al menos uno de ellos es múltiplo de 7.
13. Probar que $2n + 3m$ es divisible entre 17 sí y sólo sí $9n + 5m$ lo es.
14. Los enteros de dos dígitos desde el 19 hasta el 93 se escriben consecutivamente para formar un gran entero $N = 19202122919293$. Encontrar la mayor potencia de 3 que divide a N.
15. ¿Cuántos elementos tiene el subconjunto más grande de $S = \{1, 2, 3, \cdots, 50\}$ con la propiedad de que ningún par de elementos de S tiene suma divisible por 7?
16. Probar que no existe ningún entero que al elevarlo al cuadrado el resultado termine en 181.
17. ¿Para cuántos enteros a del 1 al 10000 se tiene que $2^a - a^2$ es múltiplo de 5?
18. Muestre que 100 divide a $1 + 11^{11} + 111^{111} + \ + 1111111111^{1111111111}$.
19. Demuestra que para cualquier entero positivo n, $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

3

Inducción matemática

Inducción Matemática: este método se usa ampliamente en la demostración matemática. Se basa en el principio de que una proposición se cumple para todo número natural n si se satisfacen las condiciones siguientes:

1. La proposición se cumple para $n = 1$.

2. La veracidad de la proposición para cualquier número natural $n = k$ implica la veracidad para el número natural siguiente: $n = k + 1$.

Esta herramienta la usaremos para reforzar un argumento en el que afirmemos que cierta proposición (hipótesis) siempre se cumplirá.

3.1. Problemas propuestos

1. $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

4. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

5. Las fórmulas para sumatorias de cuadrados y cubos.

6. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

4

Desigualdades

Desigualdad: se dice, dados dos números reales a y b, a es mayor que b siempre que $a - b$ sea positivo.

4.1. Propiedades

Sean a, b, m, n números reales se cumple lo siguiente:

- Si $a < b$ entonces $a + m < b + m$.
- Si $a < b$ y $m > 0$ entonces $am < bm$.
- Si $a < b$ y $m < 0$ entonces $am > bm$.
- Si $a < b$ y $b < m$ entonces $a < m$.
- Tricotomía: entre dos reales cualesquiera se cumple una y sólo una de las siguientes declaraciones: $a < b$, $a = b$, $a > b$.
- a^2 siempre es mayor o igual que 0.
- Si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.
- Si $a^2 < b^2$ y $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a < b$.
- Si $a < b$ y $m < n$ entonces $a + m < b + n$.
- $[x]$ es menor o igual que x y es menor que $[x] + 1$.

4.2. Definiciones

- Media aritmética: $a = \frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$.
- Media geométrica: $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n}$.
- Media Cuadrática: $C_2 = \left(\frac{x_1^2 x_2^2 x_3^2 ... x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

4.3. Teoremas que ayudan

Si $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n \in \Re^+$ y $x_1 x_2 x_3 x_4 ... x_n = 1$ entonces $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \geq n$.

4.4. Problemas propuestos

1. Demostrar que si $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n \in \Re^+$ entonces $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geq 1$
2. Demostrar que $a \geq g$(Esta desigualdad implica que si se tienen N números con suma fija, su producto máximo se da si son iguales los N números.).
3. Demostrar que si $a_i \in N$ entonces $n \cdot a_1 a_2 a_3 ... a_n \leq a_1^n + a_2^5 + ... + a_n^n$; es decir que el producto duplicado 2 números positivos es menor o igual que la suma de sus cuadrados, el producto triplicado de 3 números positivos es menor o igual que la suma de sus cubos, etc.
4. Demostrar que si $x + y + z = 6$ entonces $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.
5. Hallar el valor máximo de la función $x^6 - 8x^2 + 5$ y el mínimo de $x^6 + 8x^2 + 5$.
6. Demostrar: $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
7. ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos a y b $(a \neq b)$ cumplan que $|a - b| \geq \frac{ab}{100}$?
8. De una lámina cuadrada de dimensión $2a$, se corta de cada esquina un cuadrado para que se pueda fabricar, doblando las salientes, una caja sin tapa de volumen máximo. ¿Cuál será la dimensión de los cuadrados recortados?.

5

Problemas selectos

5.1. Problemas de cuadrículas

1. Una cuadrícula de 3 x 3 está inicialmente llena con ceros y unos como se indica. La cuadrícula se irá modificando de la siguiente manera: cada que se coloque una cuadrícula de 2 x 2 sobre la original, se aumentan en 1 los números de los cuadros comunes. ¿Es posible, repitiendo la regla, llegar a un tablero de 3 x 3 donde todos los números sean múltiplos de 2?.

1	0	1
0	1	0
1	0	1

2. En la cuadrícula indicada, una sustitución consiste en tomar el número en un cuadro y sumarle o restarle un múltiplo par de alguno de sus vecinos. ¿Es posible que después de varias sustituciones sucesivas queden los números del 1 al 25 en la cuadrícula?.

2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2

3. En una cuadrícula de 3 x 3 se acomodan los dígitos del 1 al 9 sin repetir. Considera cada renglón como un número de tres cifras, y llámale A a la suma de estos tres números. Ahora, considera cada columna como un número de 3 cifras, y llámale B a la suma de estos tres números. ¿Puedes encontrar alguna forma de acomodar los dígitos del 1 al 9 de manera que $A + B = 1997$?

4. En una cuadrícula de 3 x 3, se colocan de alguna manera los números del 1 al 9. A cada segmento interior de longitud uno de la cuadrícula, se le asigna el número que resulta de sumar los dos números de los cuadrados que tienen al segmento en común. Sea S la suma de los doce números asignados a los segmentos interiores. ¿Cuál es el valor máximo de S?

5. ¿Para que $n \geq 2$ se pueden acomodar los nmeros del 1 al 16 en los cuadros de una cuadrícula de 4 x 4 (un número en cada cuadro, sin repetir números) de tal manera que las 8 sumas de los números que quedan en cada fila y en cada columna sean múltiplos de n, y que estos 8 múltiplos sean todos distintos entre sí?.

6. Sobre los cuadrados de una cuadrícula de 4 x 4 se colocan símbolos 0 y 1; estos tres símbolos se cambian uno por el otro al aplicar alguna de las siguientes tres operaciones:

   a) La operación (a) cambia de símbolos todos los elementos de una columna.
   b) La operación (b) cambia de símbolos todos los elementos de un renglón
   c) La operación (C) cambia de símbolos todos los elementos de una diagonal.

   Determina cuáles son los arreglos de los que se puede partir para que con un número finito de operaciones se pueda llegar a un arreglo de puros 0's.

7. Se tiene un tablero de n x n pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación:

   Escoger un rectángulo de la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo (es decir, los cuadritos del rectángulo que eran negros se convierten es blancos y los que eran blancos, se convierten en negros).

   Encuentra para que n's es posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación un número de veces finito.

8. En una cuadrícula de 8 x 8 se han escogido arbitrariamente 10 cuadritos y se han marcado los centros de éstos. El lado de cada cuadrito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$, o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia $\frac{1}{2}$ de una orilla de la cuadrícula.

9. Demuestra que es posible acomodar 16 enteros consecutivos en las casillas de una cuadrícula de 4 x 4 de modo que la suma de los 4 números en cada cuadrado de 2 x 2 que se forma en la cuadrícula sea múltiplo de 3. Resuelve el mismo problema, pero con múltiplos de 5.

10. ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de 2004 x 2004 casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?

5.2. Problemas con números primos

1. Encuentre un entero mayor que 0 y menor a 2100 tal que $n = p^3qr$ donde p, q, r son números primos y $r > 80$.
2. Encuentre primos p, q tales que $10p^q2^q + q^pp^2 = 1992$.
3. Pruebe que si $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ Con p, p_1, p_2, p_3 primos y $p_1 < p_2 < p_3$ entonces $p_1 = 3$.
4. Sea n un entero positivo. Demuestre que si un primo p divide a $5n + 1$ y a $3n + 2$ entonces p divide a $n + 10$.
5. Demuestre que sólo existe un primo p tal que $2p + 1$ es un cubo perfecto.
6. Si p, q son primos tales que $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es un entero, entonces $p = q$.
7. Encuentre todos los números primos tales que su suma y su diferencia son números primos.
8. Encuentre los primos p tales que $8p^4 - 3003$ es un número primo.
9. Para a y b enteros positivos no múltiplos de 5, se construye una lista de números como sigue: El primer número es 5 y, a partir del segundo número, cada número se obtiene multiplicando el número que le precede (en la lista) por a y sumándole b. (Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, entonces los primeros tres números de la lista serían: 5, 14, 32 (pues $14 = (5 \cdot 2) + 4$ y $32 = (14 \cdot 2) + 4$). ¿Cuál es la máxima cantidad de primos que se pueden obtener antes de obtener el primer número no primo?.
10. Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12345. NOTA: una colección de números está en progresión aritmética si es de la forma: $a, a + r, a + 2r, a + 3r, \cdots, a + br$.
11. Encuentra todas las parejas de números primos p, q tales que $p^2 + q$ y $p^3 + q^2$ sean primos.
12. Halla todos los primos p tales que $p^2 + 77$ tiene exactamente 5 divisores.
13. Encuentra todos los números primos p, q y r con $p < q < r$, que cumplan con $25pq + r = 2004$ y $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

5.3. Problemas de juegos

1. Sobre una mesa hay 1999 fichas rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuál de sus dos lados está hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes cosas:

- Retira un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba.
- Voltea un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas tengan el mismo color hacia arriba.

Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál es el jugador que puede asegurar que ganará, el primero o el segundo en jugar?.

2. Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede ninguna caja vacía y que no haya tres pelotas de colores distintos que estn en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las pelotas que están afuera de ella son del mismo color.

3. El juego HEX consta de un tablero de n x n casillas hexagonales como muestra la figura donde participan dos jugadores: una con fichas rojas y otro con fichas negras. Cada jugador, alternadamente, pone una ficha en el tablero. Gana aqul que pueda construir un çamino"de su extremo del tablero al otro. ¿Qué jugador posee estrategia ganadora?

4. En una mesa circular, dos personas jugarán el siguiente juego: cada uno tiene un número suficientes de fichas circulares, las cuáles pondrán alternadamente sobre la mesa (una por una). Gana aquél que logra poner la última ficha. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

5. Se escriben en tarjetas todas las parejas de enteros (a, b) con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue: cada jugador en su turno elige (a, b) (que se retira del juego) y escribe el producto a b en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasiona que el máximo común divisor de los números escritos hasta ese momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?)

6. Hay 2001 puntos en el plano. Dos jugadores A y B juegan a trazar líneas entre los puntos, por turnos. Empieza A. Gana el primero que completa un ciclo. ¿Cuál de los jugadores tiene estrategia ganadora?