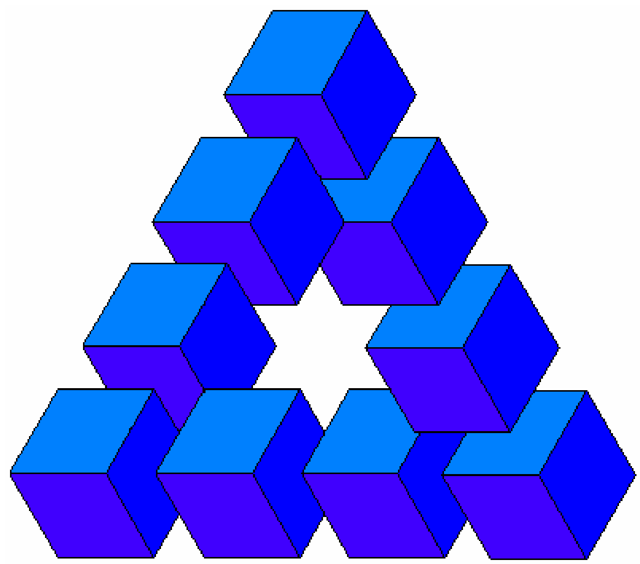
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

DELEGACIÓN QUERÉTARO



APUNTES DE GEOMETRÍA PARA OLIMPIADA

POR:

MARÍA DEL ROSARIO VELÁZQUEZ CAMACHO

AGOSTO 2006

1 LAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS

Las Olimpiadas de Matemáticas son concursos que tienen como objetivo retar la capacidad de creatividad, análisis y razonamiento deductivo así como la habilidad matemática de sus concursantes. Las herramientas de estos concursantes no van más allá de conceptos básicos de álgebra, divisibilidad, conteo y geometría. Estas Olimpiadas se realizan a niveles estatales, nacionales e internacionales.

En sus primeras etapas, cada estado de nuestro país realiza un primer examen de selección, con el fin de conformar una preselección para participar en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A su vez, en la Olimpiada Nacional, se seleccionan a los concursantes que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales. El Estado de Querétaro ha participado en la Olimpiada Mexicana desde sus inicios con buenos resultados.

El examen de selección en nuestro estado se realizó el 23 de abril de 2005. De ese examen, se seleccionaron 35 estudiantes, los cuales tomaron cursos a cargo del Comité Estatal, con el fin de seleccionar a los seis participantes que nos representarían en la Olimpiada Nacional. Después de este proceso, los alumnos elegidos para el Concurso Nacional fueron (en orden alfabético).

De Icaza Astiz Iker Loic	Prepa Norte, UAQ
Hernández Terrazas Jesús Johan	COBAQ
Mejía Avendaño Sandra	ITESM-CQ
Puente Novell Amadeo Guillermo	Universidad Contemporánea
Ríos Ferrusca José Daniel	Centro Unión
Silos de Alba José Ramón	Álamos

1.1 Resultados de la 19ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 6 al 12 de Noviembre de 2005, tuvo lugar en la Ciudad de Campeche, Cam., la 19ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Como resultado de esta olimpiada, el estado de Querétaro, obtuvo el décimo lugar de entre 32 delegaciones participantes. El Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas otorgó 16 primeros lugares, 35 segundos lugares y 47 terceros. Además, se otorgó una Mención Honorífica a aquellos participantes que, sin haber obtenido uno de los primeros lugares, si lograron completar al menos un problema.

Además de elegir a los posibles participantes en la Olimpiada Internacional de entre los Primeros Lugares, también se hace una preselección para participar en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, en esta ocasión se eligieron 5 alumnos, entre ellos un queretano: Daniel Ríos Ferrusca.

Los resultados de nuestra participación en la Olimpiada Nacional, cinco de los seis miembros del equipo queretano resultaron premiados:

Hernández Terrazas Jesús Johan	Tercer Lugar
Mejía Avendaño Sandra	Segundo Lugar
Puente Novell Amadeo Guillermo	Tercer Lugar
Ríos Ferrusca José Daniel	Segundo Lugar
Silos de Alba José Ramón	Segundo Lugar

Después de una serie de entrenamientos y exámenes a cargo del Comité Nacional, el alumno **José Daniel Ríos Ferrusca**, formó parte de la Selección que representó a México en la **VIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe**, celebrada en Panamá en los primeros días del mes de Agosto de 2006, teniendo una excelente participación ya que obtuvo **Primer Lugar** en este evento.

1.2 Del contenido de éste manual

El presente material es un trabajo desarrollado a partir de la necesidad de formalizar desde su base, la materia de Geometría que abarca la Olimpiada de Matemáticas. Elaborado durante la participación de varios años en el Comité Estatal de la Olimpiada de Matemáticas en Querétaro con el fin de proporcionar una guía para los estudiantes y los maestros acerca de los conceptos y del tipo de problemas que se preguntan sobre ésta materia en la segunda fase del examen estatal. Es importante que los estudiantes y los profesores, además de resolver los problemas, comprendan de manera precisa el significado de los enunciados y se familiaricen con la terminología y los métodos de resolución.

Cabe recordar que en el examen estatal se preguntarán problemas que retarán la capacidad de creatividad, análisis y razonamiento deductivo, así como la habilidad matemática de los participantes. Los conceptos que se manejan en este folleto no son materia de examinación en el examen estatal, aunque un manejo adecuado de ellos si garantiza una mejor comprensión de los problemas que en él se propondrán.

1.3 ¿Por qué participar en las Olimpiadas de Matemáticas?

La disciplina Matemática es de fundamental importancia para el desarrollo de un país, pues es base y cimiento del desarrollo tecnológico y científico.

Actualmente, a las Matemáticas se les ha dado un enfoque “mecánico” y poco flexible, que consiste en la memorización de conceptos y de pasos que nos llevan a la solución de un ejercicio. El verdadero enfoque de las Matemáticas va mucho más allá de ello, pues debe involucrar también un amplio conocimiento y comprensión de herramientas así como el ingenio y creatividad para aplicarlos a un suceso específico o general.

Es precisamente este enfoque el que las Olimpiadas de Matemáticas pretenden reflejar, al someter al alumno a problemas nuevos que requieran de un conocimiento y comprensión general de algunas herramientas matemáticas, pero sobre todo, la capacidad para descubrir de qué forma puede usar él estos conocimientos para llegar a un objetivo específico.

1.4 El Comité Estatal para el año 2006 está formado por

Patricia Spíndola

Profesora de la Universidad Autónoma de Querétaro
Delegada Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
e-mail: spindola@uaq.mx

Mat. Carmen Sosa Garza

Profesora de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro
e-mail: carsg@sunserver.uaq.mx

Master Gilberto Reynoso Meza

Exolímpico
e-mail: greynosom@gmail.com

Lic. María del Rosario Velázquez Camacho

Profesora del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Querétaro y exolímpica
e-mail: mrvelazq@itesm.mx

David Oswaldo Pérez Martínez

Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Exolímpico
e-mail: dopm@latinmail.com

Valentín Tovar Lazcano

Alumno de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Autónoma de Querétaro y exolímpico
e-mail: valetl111@hotmail.com

2 INTRODUCCIÓN

La geometría es el estudio de las propiedades y características de ciertos conjuntos como rectas, ángulos, triángulo y circunferencias, entre otros. Ésta se desarrolla cuidadosamente de manera lógica por medio de lo que se denomina razonamiento deductivo.

A lo largo de la historia, las diferentes áreas de la matemática han tenido distinto desarrollo al de la geometría, pues ésta es un área que desde los Griegos, se ha llevado de la misma manera, pero con los mismos buenos resultados, pues gracias a ella y al tipo de razonamiento que utiliza, es que se pueden resolver muchos problemas de manera análoga en otras áreas de la matemática y la ciencia en general. La Geometría es una de las áreas de la matemática más antiguas y más bellas; nos ayuda a adquirir habilidad en nuestros razonamientos así como una manera correcta de escritura en nuestras demostraciones.

A pesar de no haber sido el primero en trabajar en geometría, es a Euclides a quien se le reconoce por su gran trabajo en este campo, y por ello a este tipo de geometría se le llama también *Geometría Euclidiana*.

Este trabajo, pretende ser una guía de preparación para los alumnos que deseen participar en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas desarrollando habilidades geométricas para ello.

2.1 EUCLIDES

Euclides (Siglo III A. C.)

Euclides es, probablemente, el escritor científico de más éxito que jamás vivió. Su famoso libro, *Los Elementos*, era un tratado de geometría y de teoría de los números. Durante más de dos mil años, todo estudiante que aprendía geometría, lo hacía siguiendo el libro de Euclides. Y durante todo ese tiempo, Los Elementos sirvieron de modelo para el razonamiento lógico.

Nadie sabe, hoy día, cuánta de la geometría en los *Elementos* fue desarrollada originariamente por Euclides. Una parte puede haberse basado en libros anteriores, y se supone que algunas de las ideas más importantes de la obra se deben a Eudoxio, quien vivió más o menos en la misma época. En todo caso, de los libros que han llegado hasta nosotros, los *Elementos* es el primero que presenta la geometría de una manera organizada y lógica, comenzando con algunas suposiciones simples y desarrollando los teoremas mediante el razonamiento deductivo.

Éste ha sido el método fundamental de la matemática desde entonces. Es verdaderamente extraordinario que fuera descubierto tan temprano y utilizando tan bien.

2.2 Un sistema lógico

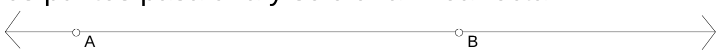
Para comenzar con el estudio de todo tipo de materias, es necesario saber cuales son los elementos con los que se trabajará; en este caso nuestros elementos primitivos (que no se definen) son:

- ✓ Punto
- ✓ Recta
- ✓ Plano

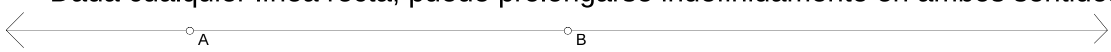
2.2.1 Postulados de Euclides

Además de lo anterior, se necesita conocer las bases de la geometría, y estas se encuentran en los postulados de Euclides, que son:

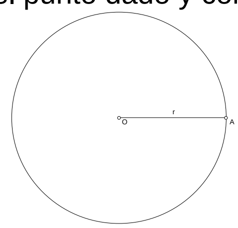
- Por dos puntos pasa una y sólo una línea recta.



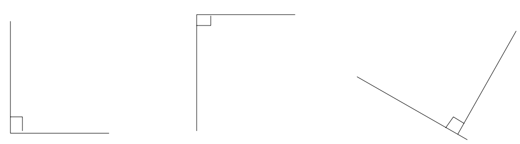
- Dada cualquier línea recta, puede prolongarse indefinidamente en ambos sentidos.



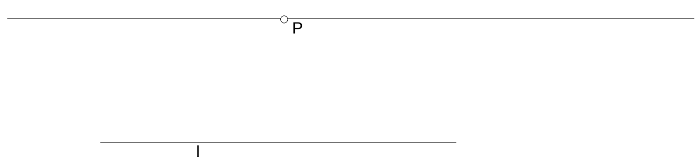
- Dado un punto cualquiera y una distancia cualquiera, se puede trazar una y sólo una circunferencia teniendo como centro el punto dado y como radio la distancia dada.



- Todos los ángulos rectos son congruentes.



- Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una y sólo una línea recta paralela a la recta dada que pase por el punto dado.



2.2.2 Propiedades de los números reales

También dentro de la geometría, los segmentos y los ángulos cumplen la función de números, considerándolos así, cumplen con las propiedades de los números reales; a continuación se enuncian las principales o las más utilizadas.

Si a,b,c y d son números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Reflexiva a = a

Simétrica Si a = b entonces b = a

Transitiva Si a = b y b = c, entonces a = c

Aditiva Si a = b y c = d, entonces a + c = b + d

Multiplicativa Si a = b y c = d, entonces ac = bd

PROPIEDAD DE TRICOTOMÍA

Para cualquier par de números a y b, una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:
$a = b$; $a < b$; $a > b$

2.3 Métodos de demostración

Todo teorema es una afirmación que necesita demostrarse, está estructurada de manera que **si** un cierta afirmación es verdadera, **entonces** una afirmación diferente es también verdadera. La parte *si*, se llama *hipótesis*; enuncia lo que se supone en la afirmación. La parte *entonces* se llama *conclusión* y enuncia lo que se quiere demostrar.

La redacción de demostraciones constituye una parte importante en la Olimpiada de Matemáticas y en la matemática en general. Conviene tener práctica en la redacción de demostraciones sencillas, antes de seguir con demostraciones más elaboradas.

Para poder realizar una demostración, existen varias formas, se enunciarán algunas de ellas, que son las más utilizadas en geometría.

2.3.1 Método directo

Este método consiste en realizar la demostración partiendo de la hipótesis hasta llegar a la conclusión mediante deducciones, siempre utilizando postulados y propiedades conocidas.

2.3.2 Método de reducción al absurdo

Este método consiste en negar la conclusión, usar esto como una hipótesis adicional y proseguir la demostración hasta llegar a una contradicción dentro de la demostración. En ese momento se concluye la demostración suponiendo que la contradicción proviene de haber negado la conclusión pues en matemáticas no hay contradicciones y por lo tanto la conclusión es verdadera.

2.3.3 ¿Qué pasos hay que seguir en una demostración?

En general, no hay una lista de pasos para realizar una demostración, cada persona tiene una forma particular de hacer demostraciones, pero en geometría se recomienda seguir los siguientes pasos:

- Leer y entender el problema;
- Identificar la hipótesis y la conclusión del problema;
- Elaborar una figura de acuerdo a los datos del problema;
- De ser necesario, realizar algún trazo auxiliar en la figura hecha;
- Elaborar un cuadro como el que sigue:

AFIRMACIONES	RAZONES
1. hipótesis	1. Dado

- En este cuadro, ir escribiendo en la parte izquierda las deducciones hechas a partir de la hipótesis y a la derecha el nombre del postulado o propiedad utilizado al hacer tal deducción.
- La demostración termina cuando se llega a la conclusión.

Esto es debido a que es importante escribir todas las afirmaciones que sean necesarias para la demostración, con la justificación propia. Posteriormente, cuando se tenga práctica, se puede excluir el cuadro de Afirmaciones – razones, sustituyéndolo por una buena redacción del problema. En dicha redacción incluso se pueden excluir algunas de las razones por las que se concluyen las cosas, pero no así los pasos esenciales para deducir alguna de las proposiciones; por otra parte se puede dar una buena demostración utilizando la simbología adecuada en lugar de redactar con palabras, por ello se presentan a continuación algunos símbolos básicos en una demostración.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	SE UTILIZA PARA...
P.D.	Por demostrar	... indicar la conclusión de una proposición, teorema o problema.
spg	sin perdida de generalidad	... resolver un caso arbitrario de entre varias opciones. Los casos restantes se resuelven de manera análoga (siguiendo el mismo método).
$\Rightarrow$	Entonces Es el símbolo de una implicación o condicional	... unir una proposición con otro resultado que se demuestra a partir de ésta.
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si Es el símbolo de una doble implicación o bicondicional	... los casos en que se tiene una proposición de la forma: Si a, entonces b; y además, si b, entonces a.
!!!!	contradicción	... indicar que hay un par de proposiciones que son contradictorias en la misma demostración. Esto es sólo cuando se utiliza el método de reducción al absurdo.
$\in$	pertenece	... indicar cuando un elemento está en algún otro elemento o conjunto.
$\exists$	Existe	... señalar que hay por lo menos un elemento que cumple alguna afirmación hecha.
$\forall$	Para todo	... señalar que para cualquier caso que se de, se cumple la afirmación hecha.
$\ni$ $\mid$	Tal que	... señalar que algún elemento cumple alguna condición establecida.
$\therefore$	Por lo tanto	... concluir una demostración.
■ **lqqd** **qed**	Demostración terminada Lo que se quería demostrar Quod est demostrarum	... indicar el final de la demostración. Puede ser este o algún otro símbolo.

A continuación se presenta una afirmación, demostrada por los métodos mencionados:

Proposición: Si AB = CD, CD = EF, demostrar que 2AB = CD + EF.

Demostración por método directo:

Utilizando el cuadro de Afirmaciones – Razones:

AFIRMACIONES	RAZONES
1. AB = CD	1. Dado
2. CD = EF	2. Dado
3. AB = EF	3. Transitiva
4. AB + AB = CD + EF	4. Aditiva
$\therefore$ 2AB = CD + EF	5. Simplificación

■

Dando la demostración redactada:

Se sabe que $AB = CD$ y que $CD = EF$
Utilizando la propiedad transitiva de la igualdad, se tiene $AB = EF$
Ahora, utilizando la propiedad aditiva de la igualdad, se tiene $AB + AB = CD + EF$
Simplificando lo anterior, $2AB = CD + EF$

lqqd .

Demostración por reducción al absurdo:

Mediante cuadro de Afirmaciones – Razones:

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $AB = CD$	1. Dado
2. $CD = EF$	2. Dado
3. $AB = EF$	3. Transitiva
4. $2AB \neq CD + EF$	4. Hipótesis adicional
5. spg $2AB > CD + EF$	5. Tricotomía
6. $CD + EF = EF + EF$	6. Sustitución
7. $CD + EF = 2EF$	7. Simplificación
8. $2AB > 2EF$	8. Transitiva
9. $AB > EF$ **!!!!**	9. Simplificación en el paso anterior, la contradicción viene de suponer el punto 5.
10. Análogamente si $2AB < CD + EF$	
$\therefore$ $2AB = CD + EF$	

■

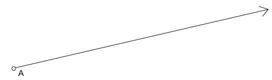
Mediante redacción sin cuadro afirmaciones-razones:

Se sabe que $AB = CD$ y que $CD = EF$
Utilizando la propiedad transitiva de la igualdad, se tiene $AB = EF$
Supongamos ahora que $2AB \neq CD + EF$
Por la propiedad de tricotomía de los números reales, se tiene que $2AB > CD + EF$ o bien que $2AB < CD + EF$.
Spg, supondremos que $2AB > CD + EF$
Sustituyendo las igualdades que se tienen: $CD + EF = EF + EF$
Simplificando lo anterior: $CD + EF = 2EF$
Utilizando la propiedad transitiva de la igualdad: $2AB > 2EF \Rightarrow AB > EF$ **!!!!**
Esto contradice nuestra segunda afirmación, por lo que $2AB > CD + EF$ es falso.
Análogamente ocurre si $2AB < CD + EF$.
$\therefore$ $2AB = CD + EF$

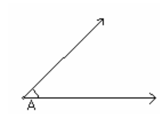
qed .

2.4 Definiciones preliminares

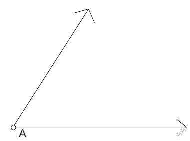
Rayo: Es una línea que tiene un punto como inicio, pero no tiene fin.



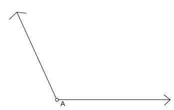
Ángulo: Porción de un plano, comprendido entre dos rayos.



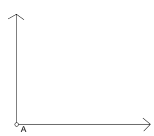
Ángulo agudo: Ángulo que mide menos de 90^o



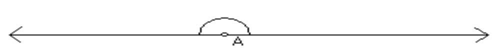
Ángulo obtuso: Ángulo que mide más de 90^o



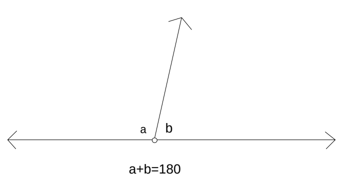
Ángulo recto: Ángulo que mide 90^o



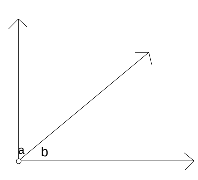
Ángulo llano: Ángulo que mide 180^o



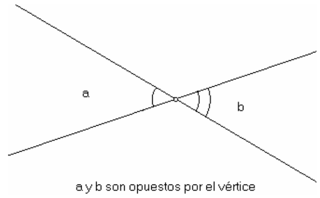
Ángulos Suplementarios: Aquellos ángulos tales que su suma es igual a 180^o



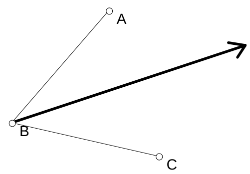
Ángulos Complementarios: Aquellos ángulos tales que su suma es igual a 90^o



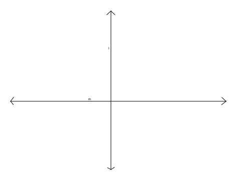
Ángulos opuestos por el vértice: Aquellos ángulos en los que los lados de uno, son las prolongaciones de los lados del otro, es decir, sus lados son las mismas rectas, pero distinto rayo.



Bisectriz: Línea recta que divide a un ángulo en dos ángulos congruentes.

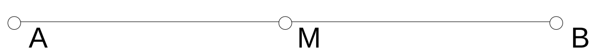


Rectas perpendiculares: Rectas que tienen entre sí un ángulo recto.



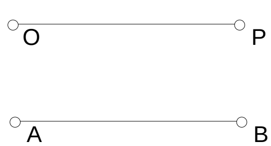
Segmento: El segmento AB es el conjunto de puntos formado por A, B y los puntos entre ambos. En un segmento AB, se dice que C está “entre” A y B, si C está sobre la recta AB y dentro del segmento AB. Se escribe (ACB) y además se tiene que AC + CB = AB.

Punto medio: Un punto M se llama *punto medio* de un segmento AB, si M está “entre” A y C, y además AB = BC. Decimos que el punto medio *biseca* al segmento.



Ángulos congruentes: Los ángulos congruentes son aquellos que tienen la misma medida.

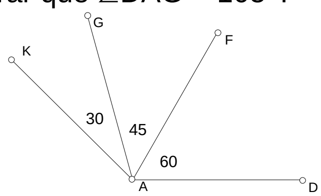
Segmentos congruentes: Dos segmentos con la misma medida, son dos segmentos congruentes.



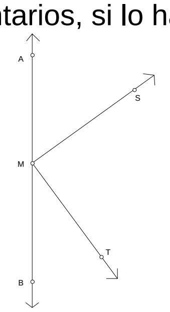
2.5 Ejercicios

1. Encuentra en suplemento a los siguiente ángulos:
   7.1 70^0
   7.2 90^0
   7.3 47^0
   7.4 63^0

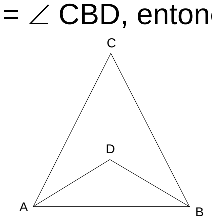
2. En la figura, los ángulos tienen las medidas indicadas.
   2.1. Nombrar un par de ángulos complementarios
   2.2. ¿Qué postulado permite asegurar que $\angle DAG = 105^0$?



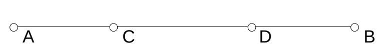
3. Se da la figura, con el vértice M del ángulo recto $\angle SMT$ en la recta AB, y $\angle TMB = 50^0$.
   3.1. Nombrar un par de rayos perpendiculares, si hay alguno.
   3.2. Nombrar un par de ángulos complementarios, si lo hay.
   3.3. Nombrar un par de ángulos congruentes, si hay alguno.
   3.4. nombrar un par de ángulos suplementarios, si lo hay.



4. Completar cada uno de los siguientes enunciados para que resulten ciertos:
   4.1. El suplemento de un ángulo agudo, es un ángulo________________
   4.2. El complemento de un ángulo agudo, es un ángulo ______________
5. Si la medida de cada ángulo es dos veces la medida de su complemento, ¿cuál es la medida de cada ángulo?
6. Ángulos suplementarios a ángulos congruentes, son congruentes.
7. Ángulos complementarios a ángulos congruentes, son congruentes.
8. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
9. Si en la figura $\angle DAB = \angle DBA$ y $\angle CAD = \angle CBD$, entonces $\angle CAB = \angle CBA$.



10. Sean A, B, C y D como en la figura, con AD = CB. Demostrar que AC = DB.



11. Dado un ángulo agudo, construye un ángulo congruente.

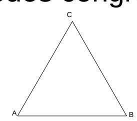
3 EL TRIÁNGULO

3.1 Clasificación de los triángulos

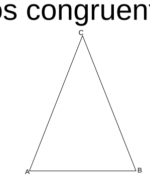
Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos AB, AC y BC se llama *triángulo*, y se indica con ΔABC. Los puntos A, B y C se llaman *vértices*, y los segmentos AB, AC y BC se llaman *lados*.

Por sus lados:

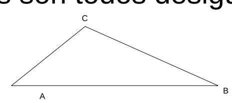
Equilátero: Triángulo cuyos lados son todos congruentes.



Isósceles: Triángulo que tiene dos lados congruentes.

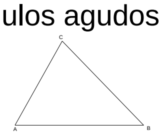


Escaleno: Triángulo cuyos tres lados son todos desiguales.

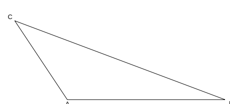


Por sus ángulos:

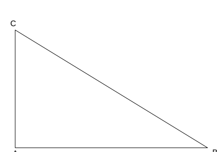
Acutángulo: Triángulo con sus tres ángulos agudos.



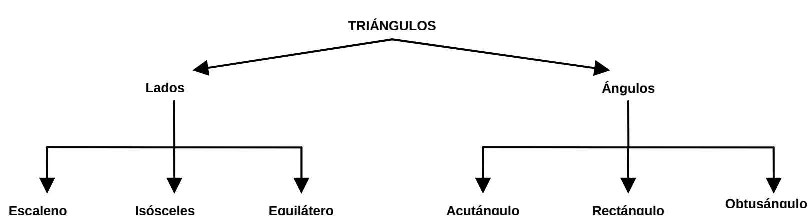
Obtusángulo: Triángulo con un ángulo interno obtuso.



Rectángulo: Triángulo con un ángulo interno recto.

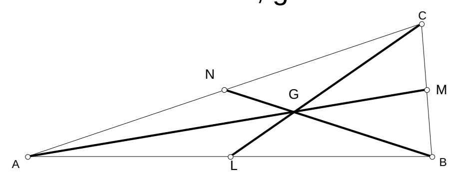


Se puede observar esta clasificación como sigue:

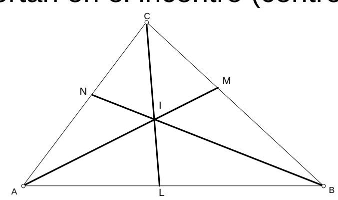


3.2 Rectas del triángulo

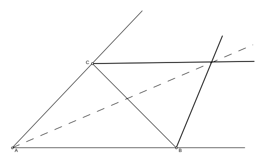
Mediana: En un triángulo, los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto se llaman medianas. Son tres y se cortan en el baricentro, gravicentro o centroide.



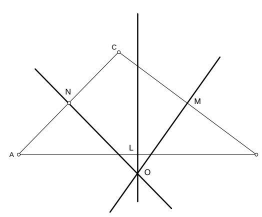
Bisectriz interior: Es la bisectriz (línea recta que corta en dos ángulos congruentes) de un ángulo interior de un triángulo. Son tres y se cortan en el incentro (centro de la circunferencia inscrita).



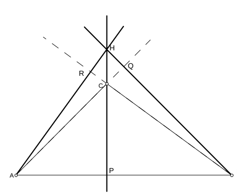
Bisectriz exterior: Es la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo. Son tres y se cortan por parejas junto con una bisectriz interna en los excentros.



Mediatriz: La mediatriz de un segmento *AB* es la línea recta que pasa perpendicularmente por su punto medio. En un triángulo hay tres y se cortan en el circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita).



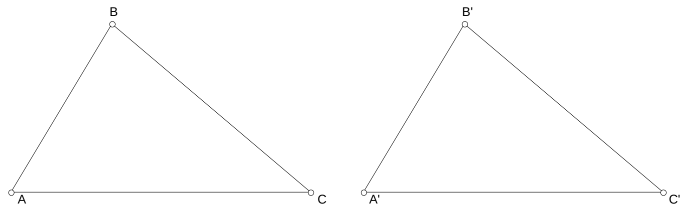
Altura: Línea recta que une perpendicularmente un vértice con el lado opuesto o su prolongación, en todo triángulo hay tres y se cortan en el ortocentro.



3.3 Congruencia

Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes si y sólo si ocurren las seis igualdades siguientes:

$$AB = A'B' \qquad \angle A = \angle A'$$
$$BC = B'C' \qquad \angle B = \angle B'$$
$$CA = C'A' \qquad \angle C = \angle C'$$



3.3.1 Criterios de congruencia

Para que dos triángulos sean congruentes es suficiente que cumplan una de las siguientes tres condiciones:

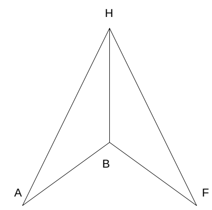
Ángulo-Lado-Ángulo (ALA): Tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos congruente.
Lado-Ángulo-Lado (LAL): Tienen dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos congruente.
Lado-Lado-Lado (LLL): Tienen los tres lados congruentes.

3.4 Teorema de Pitágoras

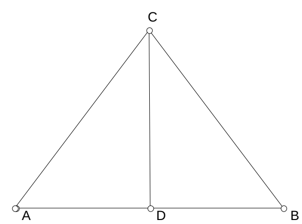
En Todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos; *e inversamente*, si en un triángulo, el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

3.5 Ejercicios

1. Si dos segmentos se bisecan, entonces los segmentos que unen los extremos de los segmentos dados son congruentes.
2. Si AE interseca a BD en C, de modo que AC = DC y BC = EC. Demostrar que $\angle A = \angle D$.
3. En la figura, AH = FH, $\angle AHB = \angle FHB$. Demostrar $\angle A = \angle F$

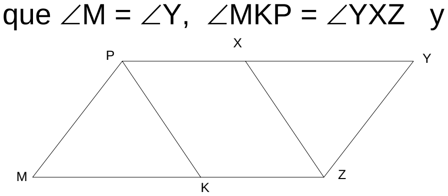


4. Terminar la siguiente demostración:
   Dato: La figura, con CD $\perp$ AB y AD = BD. Demostrar $\Delta ADC \cong \Delta BDC$

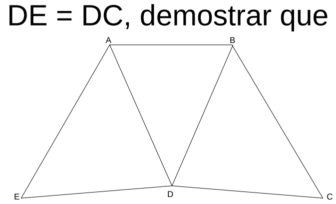


AFIRMACIONES	RAZONES
1. AD = BD	1. Dado
2. CD $\perp$ AB	2. ____________________
3. $\angle ADC = \angle BDC$	3. Definición de perpendicularidad y ángulo recto
4. CD = CD	4. Identidad
5. $\Delta ADC \cong$ __________	5. ____________________

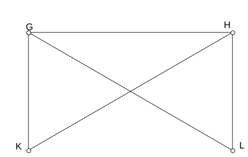
5. Datos: ΔMKP y ΔXYZ son tales que $\angle M = \angle Y$, $\angle MKP = \angle YXZ$ y MK = XY. Demostrar PK = ZX



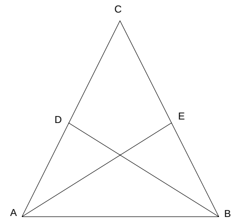
6. Un segmento RS y los puntos T y U en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{RS}$ tales que TR = UR, TS = US y UR < US. Demostrar que $\angle T = \angle U$.
7. En la figura, si AE = BC, AD = BD y DE = DC, demostrar que $\angle E = \angle C$.



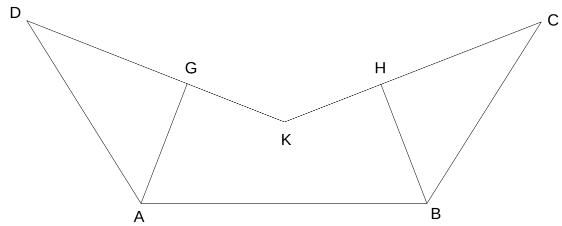
8. En la siguiente figura, si KG $\perp$ GH, LH $\perp$ GH y $\angle KHG = \angle LGH$, demostrar que KH = LG.



9. En la figura, AC = BC y $\angle$CAE = $\angle$CBD. Demostrar que ΔACE $\cong$ ΔBCD.



10. Datos: DG = CH, $\angle$D = $\angle$C, AG $\perp$ DK, BH $\perp$ CK. Demostrar: AD = BC.

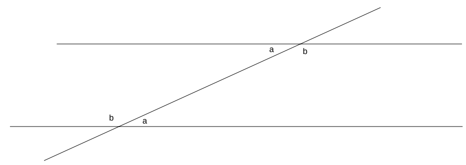


11. La recta L es perpendicular a XY y biseca a XY en S. Los puntos R y T son los puntos medios de XS y YS, respectivamente. Los puntos A y B se toman en L en lados opuestos de $\overleftrightarrow{XY}$ de tal modo que AX = BY y AT = BR. Demostrar que AS = BS.
12. Se sabe que BQ corta a PA en R, pero BQ $\neq$ PA. B y Q están en lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{PA}$. S y C son puntos en los segmentos PR y AR, respectivamente, tales que RS = RC, BC $\perp$ PA y QS $\perp$ PA. También, $\angle$BAR = $\angle$QPR. Demostrar que PA biseca a BQ y que $\angle$ABC = $\angle$PQS.
13. Se dan dos triángulos congruentes. Demostrar que la bisectriz de un ángulo de uno de los triángulos es congruente con la bisectriz del ángulo correspondiente del otro triángulo.
14. Las medianas trazadas a los lados congruentes de un triángulo isósceles, son congruentes.
15. La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos tales que equidistan a dos puntos dados. Los puntos son los extremos del segmento.
16. Demostrar que la bisectriz de cada ángulo de un triángulo equilátero es una mediana del triángulo.
17. En un triángulo isósceles, la altura, la mediana, la mediatriz y la bisectriz del lado (o ángulo) desigual, son la misma recta.
18. Todo triángulo con dos alturas congruentes es isósceles.

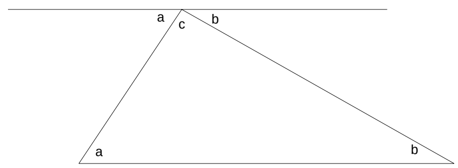
4 PARALELISMO

Postulado de las paralelas de Euclides: Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una y sólo una recta que pasa por ese punto y es paralele a la recta dada.

TEOREMA: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces forman ángulos alternos internos congruentes; y viceversa, si en dos rectas cortadas por una transversal los ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.



TEOREMA: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180^o



4.1 Proporcionalidad

Razón: Cociente de dos números o cantidades.

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{AB}{CD} \qquad \frac{5}{8}$$

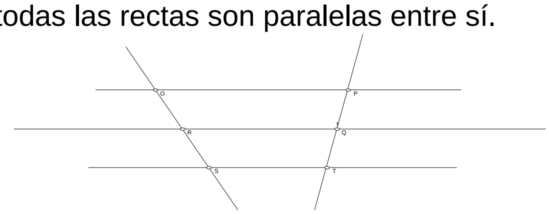
Proporción: Igualdad entre dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{AB}{CD} \qquad \frac{5}{8} = \frac{10}{16}$$

Segmentos proporcionales: Segmentos que guardan la misma proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{AB}{CD} \qquad \frac{a}{b} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE PROPORCIONALIDAD: Si dos o más rectas son cortadas por dos transversales, entonces los segmentos que éstos determinan son proporcionales; y si dos o más rectas cortadas por dos transversales forman segmentos proporcionales y además dos de las rectas son paralelas, entonces todas las rectas son paralelas entre sí.



$$\frac{OR}{RS} = \frac{PQ}{QT}$$

4.1.1 Propiedades de las proporciones:

i) De la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se siguen las proporciones $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ y $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

ii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y sólo si *ad = bc*

iii) Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ y además $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

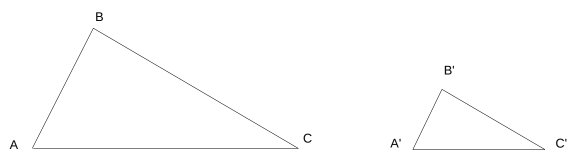
iv) Si $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=...\frac{x_n}{y_n}$ entonces $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{y_1+y_2+y_3}$, etc. Más aún, para cualesquiera $a_i \neq 0$. Si $r=\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=...\frac{x_n}{y_n}$, entonces $r=\frac{a_1x_1+a_2x_2+...+a_kx_k}{a_1y_1+a_2y_2+...+a_ky_k}$; donde $1 \le k \le n$

4.2 Semejanza

Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes si y sólo si ocurren todas las igualdades siguientes:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{C'A'}}$$

$$\angle \mathrm{A}=\angle A' \qquad \angle B=\angle B' \qquad \angle C=\angle C'$$



4.2.1 Criterios de semejanza

Dados dos triángulos, son semejantes si cumplen con alguna de las siguientes condiciones:

LAL: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruente.
LLL: Tienen los tres lados proporcionales.
AA: Tienen dos ángulos congruentes.

4.3 Ejercicios

1 En los lados del $\angle A$, se toman los puntos B y C de tal modo que AB = AC. Una recta por B es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ en D. Análogamente, una recta por C es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ en E. Si AD = AE, demostrar que BD = CE.

2 La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos tales que equidistan a dos rectas dadas. Las rectas de que habla son las que forman los lados del ángulo.

3 En un plano, si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces son paralelas entre sí.

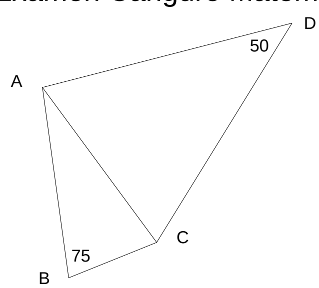
4 En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra.

5 En todo triángulo, el ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.

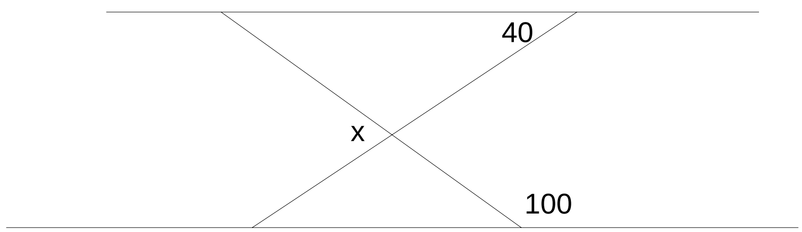
6 Mostrar que la bisectriz de un ángulo interno y la bisectriz del ángulo externo correspondiente, se cortan perpendicularmente.

7 Las medidas de los ángulo de un triángulo están en la razón 1:2:3. Hallar la medida de cada ángulo.

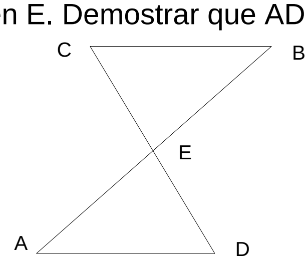
8 En la siguiente figura AD = DC, AB = AC, el ángulo $\angle ABC$, mide 75^0 y el ángulo $\angle ADC$ mide 50^0. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BAD$? (Examen Canguro Matemático 2000, OMM)



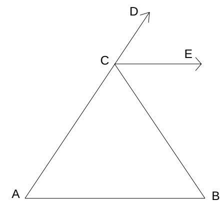
9 ¿Cuánto vale el ángulo x, si las rectas son paralelas? (Examen de Ubicación, OMMor 1999)



10 En la figura, AB y CD se bisecan en E. Demostrar que $AD \parallel CB$.



11 En la siguiente figura, AC = BC y $\angle DCE = \angle B$. Demostrar que $\overrightarrow{CE} \parallel AB$.



12 Mostrar que en cualquier triángulo, los puntos medios de uno dos lados, forman un segmento paralelo al tercer lado e igual a la mitad de este.

13 En todo triángulo, las medianas se cortan en proporción 1:2.

14 Demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.

15 Todo triángulo con dos medianas congruentes es isósceles.

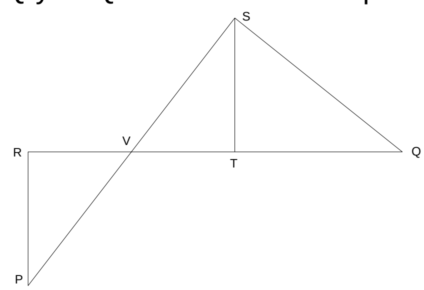
16 En el triángulo ΔABC, el $\angle ACB$ es un ángulo recto y $CD \perp AB$. Demostrar que $\angle A = \angle BCD$.

17 Demostrar que una recta paralela a la base de un triángulo isósceles y que interseca a los otros dos lados en puntos diferentes, determina otro triángulo isósceles.

18 Se tiene que AC y BD se intersecan en E, con (AEC) y (DEB), tal que AD = BC y $AD \parallel BC$. Demostrar que AC y BD se bisecan en E.

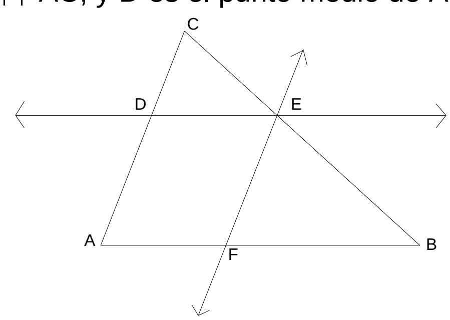
19 En el triángulo ΔABC, la bisectriz de $\angle A$ interseca a BC en D. La mediatriz de AD interseca a AC en G. Demostrar que $GD \parallel AB$.

20 En la figura, $PR \perp RQ$, $ST \perp RQ$ y $SQ \perp PS$. Demostrar que $\angle P = \angle Q$.



21 Demostrar que si la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo es paralela a un lado del triángulo, éste es isósceles.

22 En la figura, $\overleftrightarrow{DE} \parallel AB$, $\overleftrightarrow{EF} \parallel AC$, y D es el punto medio de AC. Demostrar que $\Delta CDE \cong \Delta EFB$.

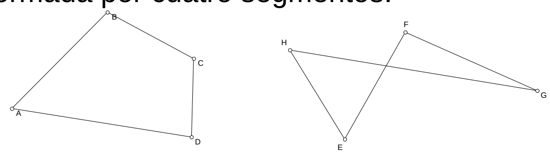


23 Se da un triángulo equilátero, ΔABC. En el rayo opuesto a $\overrightarrow{BA}$, tómese el punto D tal que BD = AC. Demuéstrese que $\angle BCD = 30^0$.

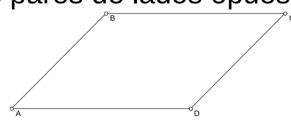
5 CUADRILÁTEROS

5.1 Definiciones

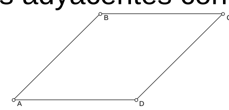
Cuadrilátero: Figura cerrada formada por cuatro segmentos.



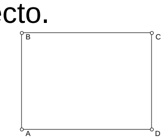
Paralelogramo: Cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.



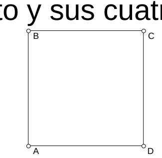
Rombo: Paralelogramo con un par de lados adyacentes congruentes.



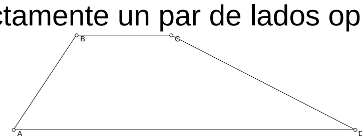
Rectángulo: Paralelogramo con un ángulo recto.



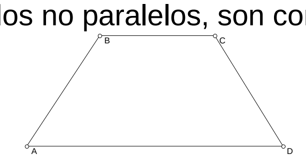
Cuadrado: Paralelogramo con un ángulo recto y sus cuatro lados congruentes.



Trapecio: Cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados opuestos paralelos.



Trapecio isósceles: Trapecio cuyos lados no paralelos, son congruentes.



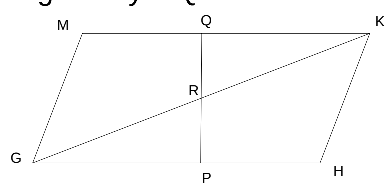
Cuadrilátero convexo: Un cuadrilátero es *convexo*, si dos cualesquiera de sus vértices no están en lados opuestos de una recta que contiene a un lado del cuadrilátero. O bien, si se toman dos puntos dentro del cuadrilátero y el segmento que los une se encuentra completamente contenido dentro del cuadrilátero.

Diagonal: En un cuadrilátero, una diagonal es un segmento que uno dos vértices que no forman un lado.

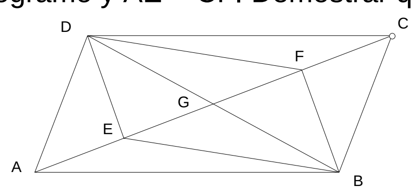
Distancia de un punto a una recta: La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

5.2 Ejercicios

1. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo es igual a 360^0.
2. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
3. En un paralelogramo, los lados opuestos cualesquiera son congruentes.
4. Si un lado de un cuadrilátero es igual y paralelo a su lado opuesto, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo
5. En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.
6. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan
7. Se dan un paralelogramo y una de sus diagonales. Demostrar que si se trazan segmentos desde los vértices opuestos, perpendiculares a la diagonal, entonces dichos segmentos son paralelos y congruentes.
8. Se da cualquier triángulo y los puntos medios de los lados. Demostrar que el perímetro del triángulo formado por los puntos medios tiene la mitad del perímetro del triángulo original.
9. Las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD se cortan en M. Demostrar que si los puntos X, Y están en lados opuestos del paralelogramo, y XY contiene a M, entonces M biseca a XY.
10. Mostrar que las diagonales de un rombo bisecan a los ángulos del rombo.
11. Mostrar que las diagonales de un rectángulo son congruentes.
12. El segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un trapecio es igual a la semisuma de los lados paralelos.
13. Si ABCD es un paralelogramo en el que L y M son puntos medios de AB y CD respectivamente, demostrar que los segmentos LC y AM dividen a la diagonal en tres segmentos congruentes.
14. Dado cualquier cuadrilátero, el cuadrilátero formado por los puntos medios de cada lado, es un paralelogramo.
15. El cuadrilátero GHKM es un paralelogramo y MQ = HP. Demostrar que GK y PQ se bisecan.



16. En la figura, DEBF es un paralelogramo y AE = CF. Demostrar que ABCD es un paralelogramo.



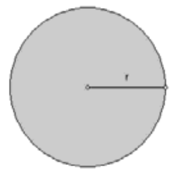
17. Si ABCD es un cuadrado y P, Q, R y S son los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demostrar que $\angle PQR = \angle PSR$.
18. En el cuadrilátero ABCD, $AC \perp BD$ en F, AC = BD y FD = FC. Demostrar que $\Delta ACD \cong \Delta BDC$.
19. Dos rectas paralelas son equidistantes en todas partes.
20. Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.

6 ÁREAS

6.1 De un círculo

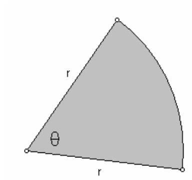
Un círculo o región circular es la reunión de una circunferencia y su interior.

El área del círculo, es el área de la región circular correspondiente. El área de un círculo de radio r es πr^2.



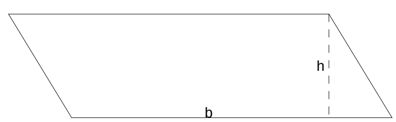
6.2 De un sector circular

Un sector circular es una porción de círculo formada por dos radios, el arco que abarcan y el interior de la figura formada por ellos. El área de un sector circular de radio r es $S = \frac{\theta * r^2}{2}$, donde θ es el ángulo central formado por los lados del sector.



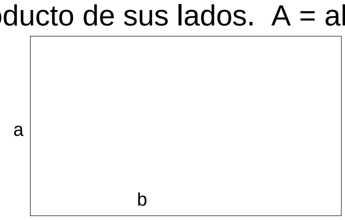
6.3 De un paralelogramo

El área de un paralelogramo es el producto de una base cualquiera y la altura correspondiente.
A = b*h



6.4 De un rectángulo

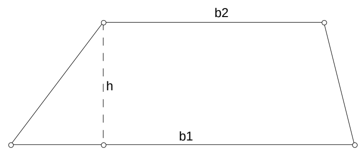
El área de un rectángulo es igual al producto de sus lados. A = ab



6.5 De un trapecio

El área de un trapecio es la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.

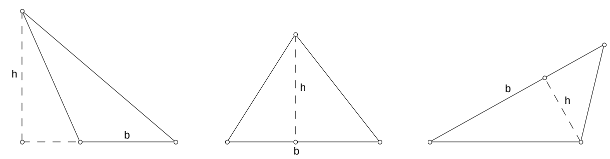
$$A = \frac{h(b_1 + b_2)}{2}$$



6.6 De un triángulo

El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura correspondiente.

$$A = \frac{b*h}{2}$$



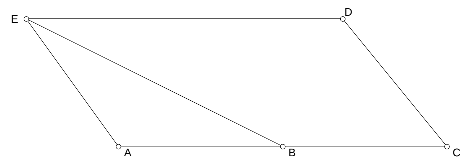
El área de un *triángulo rectángulo* es la mitad del producto de sus catetos.

Fórmula de Heron: Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, $S = \frac{a+b+c}{2}$ es el *semiperímetro* del triángulo. El área del triángulo es:

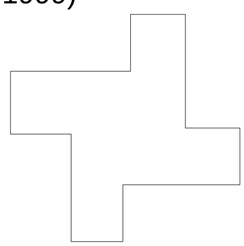
$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

6.7 Ejercicios

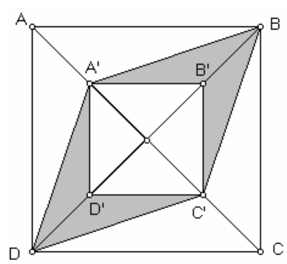
1. Si dos triángulos son congruentes, sus áreas son congruentes.
2. La mediana de un triángulo divide al triángulo en dos triángulos de áreas congruentes.
3. Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.
4. Si se unen los puntos medios de un triángulo cualquiera, los segmentos dividen al triángulo en 4 regiones de áreas congruentes.
5. El área de un rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales.
6. En la figura, B es el punto medio de AC, y ED || AC. Demuéstrese que $\Delta ABE = \Delta BCD$.



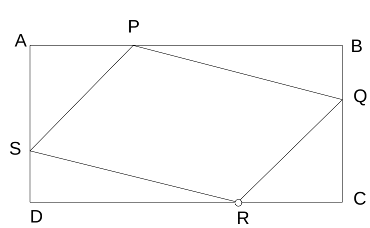
7. Un triángulo y un paralelogramo tienen áreas iguales y bases iguales. ¿Cómo comparan sus alturas?
8. En la siguiente figura los lados grandes y chicos son todos iguales entre si. Los lados chicos miden la mitad de los grandes. Todos los ángulos son rectos y el área es 200 cm^2. ¿Cuál es el perímetro de la figura? (Examen de Ubicación OMMor, 1999)



9. En la siguiente figura ABCD es un cuadrado. AB = 12. S A', B', C' y D' son puntos medios de AO, BO, CO y DO respectivamente, encontrar el área de la región sombreada. (Examen Estatal de la XIII OMMor, 1999)

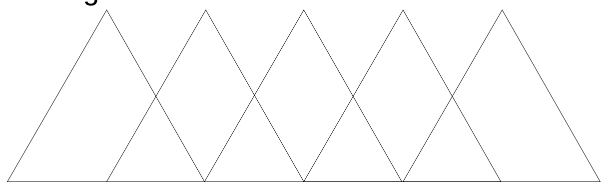


10. En la figura los puntos P, Q, R y S dividen cada lado del rectángulo en razón 1:2. ¿ Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo PQRS y el área de ABCD? (Examen Canguro Matemático 2000)



11. Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 2, y también el área de un triángulo equilátero de lado k.
12. Un cubo se encuentra inscrito en una esfera cuyo radio mide 1 cm. ¿Cuál es la longitud del lado del cubo? (Recopilación de problemas OMMQro, 2000)

13. En un triángulo equilátero de papel se doblan las tres esquinas hacia adentro de tal manera que los tres vértices queden justo en el centro del triángulo. Describir el contorno de la figura obtenida. (Recopilación de problemas OMMQro, 2000)
14. Cinco triángulos equiláteros, cada uno de lado $2\sqrt{3}$, son arreglados de tal manera que todos ellos están del mismo lado de una línea que contiene un lado de cada uno. Sobre la línea, el punto medio de la base de un triángulo es un vértice del siguiente. ¿Cuál es el área de la región del plano que es cubierta por la unión de los triángulos?



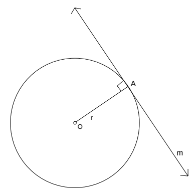
15. Un cuadrado y un rectángulo tienen áreas iguales. Si el rectángulo mide 25 cm, por 16 cm. ¿Cuál es la longitud de un lado del cuadrado?
16. La altura de un triángulo equilátero es 12. Determinar la longitud de un lado y el área del triángulo.
17. Un trapecio tiene lados paralelos de 13 cm y 21 cm de longitud. El lado más largo de los lados no paralelos mide 17 cm y el más corto es perpendicular a los lados paralelos. Calcúlese el área del trapecio.

7 LA CIRCUNFERENCIA

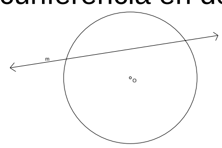
7.1 Definiciones

Postulado 3 de Euclides: Dado un punto cualquiera y una distancia cualquiera, podemos trazar una y sólo una circunferencia teniendo como centro el punto dado y como radio la distancia dada.

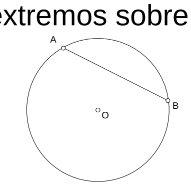
Tangente: Si A es un punto sobre la circunferencia de centro O y radio r $C(o,r)$, m es una recta perpendicular al radio en el extremo A.



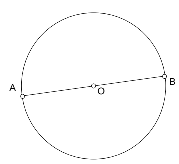
Secante: Cualquier recta m que cruce la circunferencia en dos puntos.



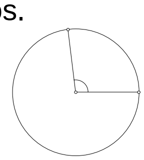
Cuerda: Segmento de recta que tenga sus extremos sobre la circunferencia y no pase por el centro.



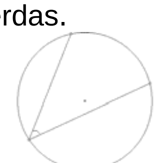
Diámetro: Cuerda que pasa por el centro.



Ángulo central: Ángulo formado por dos radios.



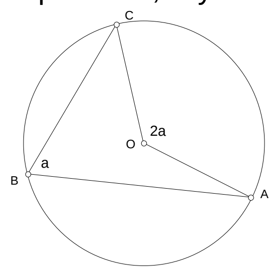
Ángulo inscrito: Ángulo formado por dos cuerdas.



Ángulo semi-inscrito: Ángulo formado por una cuerda y un segmento tangente.

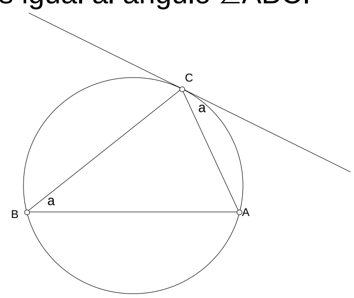
7.2 Teorema de arco central y arco inscrito

Dada una circunferencia con centro *O* y tres puntos *A, B* y *C* sobre ella, entonces $\angle AOC = 2\angle ABC$



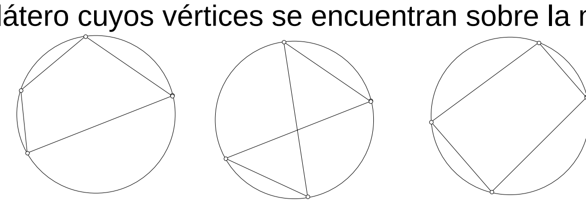
7.3 Teorema de tangente y triángulo inscrito

Sea C_1 la circunferencia circunscrita al triángulo ΔABC, sea *l* la tangente a C_1 en el punto *C*. El ángulo formado por la tangente y el lado CA es igual al ángulo $\angle$ABC.



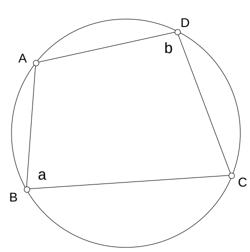
7.4 Cuadriláteros cíclicos

Cuadrilátero cíclico: Cuadrilátero cuyos vértices se encuentran sobre la misma circunferencia.

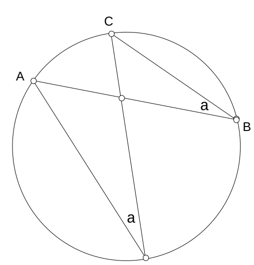


Teorema: El cuadrilátero *ABCD* es cíclico si y sólo si cumple una de las siguientes condiciones:

a) $\angle ABC + \angle CDA = 180^{o}$
b) $\angle ADC = \angle ABC$



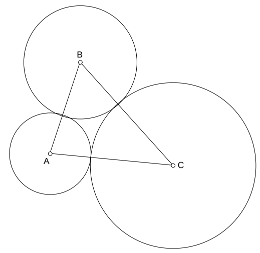
a+b=180



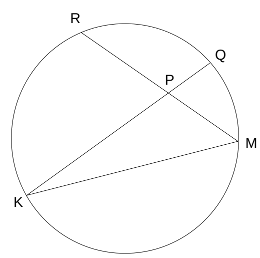
Fórmula de Brahmagupta: Si a, b, c y d son las longitudes de los lados de un cuadrilátero cíclico, $S = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ es el semiperímetro del cuadrilátero, entonces el área del cuadrilátero es $A = \sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$

7.5 Ejercicios

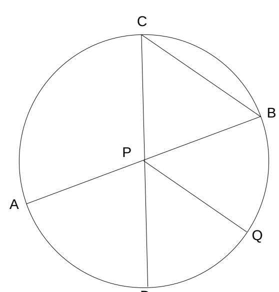
1. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico, una circunferencia C_1 que pasa por A y D corta a la recta AB en E, y otra circunferencia C_2 que pasa por C y D corta a la recta BC en F. Sea G el segundo punto de intersección de C_1 y C_2. Muestre que E, F y G son colineales.
2. Si AB y CD son dos diámetros de una circunferencia, entonces AC = BD y AC ∥ BD.
3. Demostrar que las tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro son paralelas.
4. En la figura, cada una de las circunferencias con centros A, B y C es tangente a las otras dos. Si AB = 10, AC = 14 y BC = 18, determínese el radio de cada circunferencia.



5. La perpendicular desde el centro de una circunferencia a una cuerda biseca a ésta.
6. El segmento desde el centro de una circunferencia al punto medio de una cuerda es perpendicular a ésta.
7. A cuerdas iguales corresponden arcos iguales.
8. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.
9. AB es un diámetro de una circunferencia y C y D son puntos de la misma a lados opuestos de AB tales que BC = BD. Demuéstrese que $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.
10. Si dos tangentes a una circunferencia se intersecan, forman un triángulo isósceles con la cuerda que une los puntos de tangencia.
11. En la figura de la derecha, si RP = 8, MP = 6 y PQ = 3, calcular KQ.



12. Se da la circunferencia con centro P y, además, CB ∥ PQ. Si $\angle BCP = 55^0$, determínense los arcos BQ y AD.



8 SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

8.1 Ejercicios 2.5

1. 1.1 110^o 1.2 90^o 1.3 133^o 1.4 117^o
2. 2.1 $\angle$KAG y $\angle$FAD 2.2 Aditivo
3. 3.1 $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{MT}$ 3.2 $\angle$ABS y $\angle$TMB 3.3 No los hay 3.4 $\angle$TMB y $\angle$AMT
4. 4.1 Obtuso 4.2 Agudo
5. $\alpha = 2(90 - \alpha) \Rightarrow \alpha = 180 - 2\alpha \Rightarrow 3\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 180/3 \quad \therefore \alpha = 60^o$
6. Sean $\alpha, \beta, \gamma,$ y δ cuatro ángulos tales que $\alpha + \beta = 180^o$, $\gamma + \delta = 180^o$ y $\alpha = \gamma$.
   P. D. $\beta = \delta$

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\alpha + \beta = 180^o$	1. Dado
2. $\gamma + \delta = 180^o$	2. Dado
3. $\alpha + \beta = \gamma + \delta$	3. Propiedad Transitiva de la igualdad
4. $\alpha = \gamma$	4. Dado
5. $\beta = \delta$	5. Cancelación

$\therefore \beta = \delta$

■

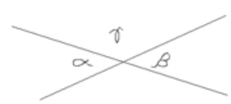
7. Sean $\alpha, \beta, \gamma,$ y δ cuatro ángulos tales que $\alpha + \beta = 90^o$, $\gamma + \delta = 90^o$ y $\alpha = \gamma$.
   P. D. $\beta = \delta$

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\alpha + \beta = 90^o$	1. Dado
2. $\gamma + \delta = 90^o$	2. Dado
3. $\alpha + \beta = \gamma + \delta$	3. Propiedad Transitiva de la igualdad
4. $\alpha = \gamma$	4. Dado
5. $\beta = \delta$	5. Cancelación

$\therefore \beta = \delta$

■

8. Sean α y β dos ángulos opuestos por el vértice. P. D. $\alpha = \beta$



AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\alpha + \gamma = 180^o$	1. α y γ son suplementarios
2. $\beta + \gamma = 180^o$	2. β y γ son suplementarios
3. $\alpha = \beta$	3. Suplementos a un mismo ángulo

$\therefore \alpha = \beta$

■

9.

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\angle$DAB = $\angle$DBA	1. Dado
2. $\angle$CAD = $\angle$CBD	2. Dado
3. $\angle$CAB + $\angle$CAD = $\angle$DBA + $\angle$CBD	3. Propiedad aditiva de la igualdad
4. $\angle$CAB = $\angle$CBA	4. Simplificación

$\therefore \angle$CAB = $\angle$CBA

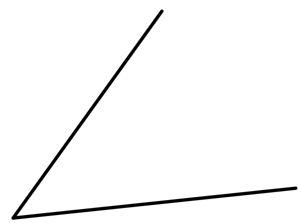
■

10.

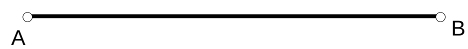
AFIRMACIONES	RAZONES
1. AD = CB	1. Dado
2. AD = AC + CD	2. (ACD)
3. CB = CD + DB	3. (CDB)
4. AC + CD = CD + DB	4. Sustitución
5. AC = DB	5. Cancelación
∴ AC = DB	

■

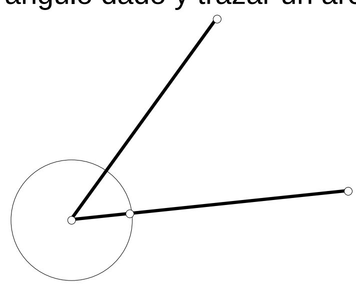
11. Para reproducir un ángulo dado, se siguen los siguientes pasos:
Sea el ángulo dado el siguiente:



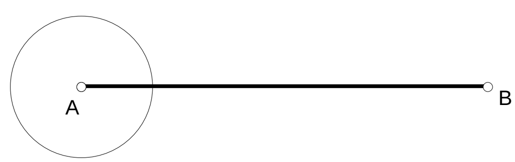
a) Trazar un segmento AB:



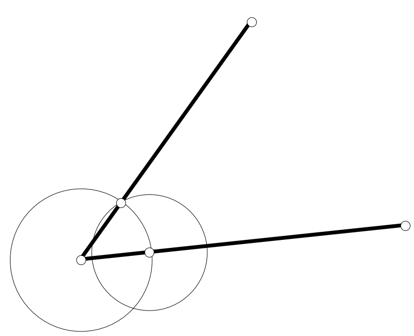
b) Colocar el compás en el vértice del ángulo dado y trazar un arco cualquiera sobre el ángulo:



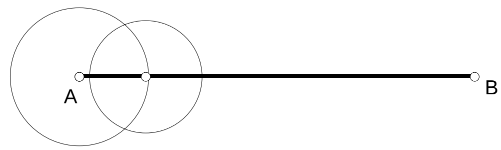
c) Con esta misma abertura, trazar un arco con vértice en A (uno de los extremos del segmento dado:



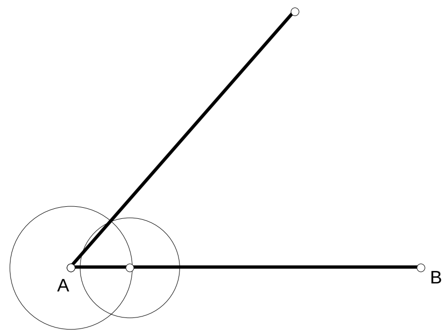
d) Con el compás medir la distancia entre los dos puntos de intersección del arco con el ángulo dado:



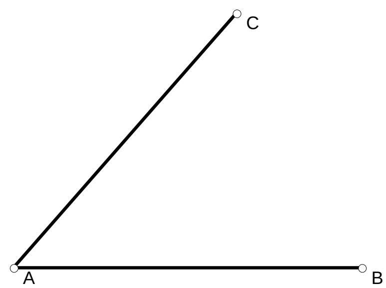
e) Colocando el compás (con la abertura de la medida del punto anterior) sobre el punto de intersección del arco y el segmento dado. Medir sobre el arco la abertura dada.



f) Unir el vértice A con el punto encontrado en (e):

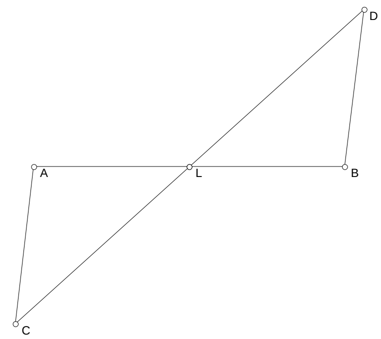


g) El ángulo así trazado es congruente al ángulo dado:



8.2 Ejercicios 3.5

1. Sean AB y CD dos segmentos tales que se bisecan en L.
   P. D. AC = DB

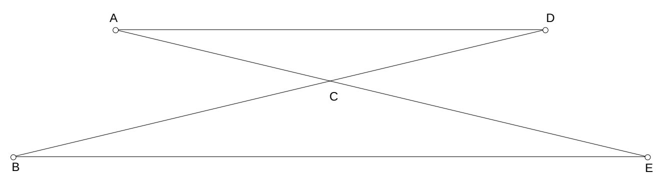


AFIRMACIONES	RAZONES
1. AB y CD se bisecan en L	1. Dado
2. L es punto medio de AB L es punto medio de CD	2. Definición de bisecar
3. AL = LB	3. Definición de punto medio
4. CL = LD	4. Definición de punto medio
5. $\angle$ALC = $\angle$BLD	5. Ángulos opuestos por el vértice
6. ΔALC $\cong$ ΔBLD	6. Criterio de congruencia LAL
7. AC = BD	7. Lados correspondientes en triángulos congruentes.

$\therefore$ AC = BD

■

2.

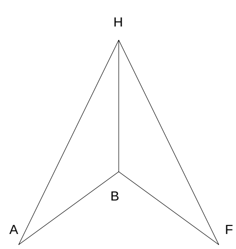


AFIRMACIONES	RAZONES
1. AC = CD	1. Dado
2. ΔACD es isósceles	2. Definición de triángulo isósceles
3. $\angle$CAD = $\angle$CDA	3. Propiedad de triángulo isósceles

$\therefore$ $\angle$A = $\angle$D

■

3.



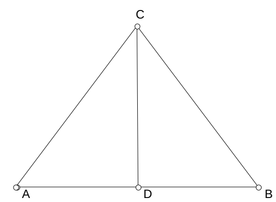
AFIRMACIONES	RAZONES
1. AH = FH	1. Dado
2. $\angle$AHB = $\angle$FHB	2. Dado

3. HB = HB	3. Identidad
4. ∆AHB = ∆FHB	4. Criterio de congruencia LAL
5. ∠HAB = ∠HFB	5. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes

∴ ∠A = ∠F

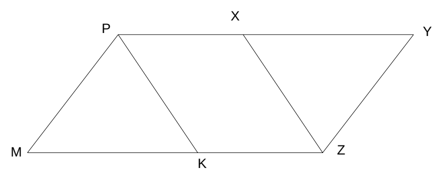
■

4.



AFIRMACIONES	**RAZONES**
	Dado
∆ADC ≅ ∆BDC	Criterio de congruencia LAL

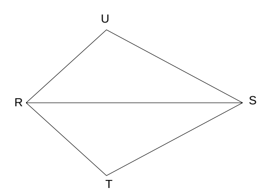
5.



AFIRMACIONES	**RAZONES**
1. ∠M = ∠Y	1. Dado
2. MK = XY	2. Dado
3. ∠MKP = ∠YXZ	3. Dado
4. ∆MKP ≅ ∆YXZ	4. Criterio de congruencia LAL
5. PK = ZX	5. Lados correspondientes en triángulos congruentes

qed

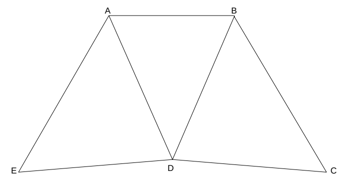
6.



AFIRMACIONES	**RAZONES**
1. UR = TR	1. Dado
2. US = TS	2. Dado
3. RS = RS	3. Identidad
4. ∆RUS ≅ ∆RTS	4. Criterio de congruencia LLL
5. ∠RUS = ∠RTS	5. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes

lqqd

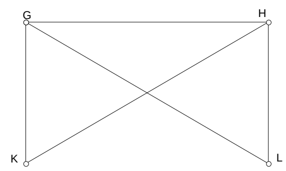
7.



AFIRMACIONES	RAZONES
1. AE = BC	1. Dado
2. AD = BD	2. Dado
3. DE = DC	3. Dado
4. $\Delta ADE \cong \Delta BDC$	4. Criterio de congruencia LLL
5. $\angle E = \angle C$	5. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes

lqqd

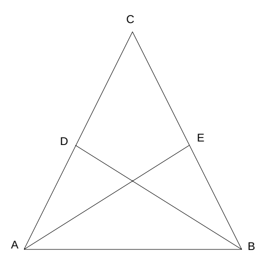
8.



AFIRMACIONES	RAZONES
1. $KG \perp GH$	1. Dado
2. $\angle KGH = 90^O$	2. Definición de perpendicularidad
3. $LH \perp GH$	3. Dado
4. $\angle LHG = 90^O$	4. Definición de perpendicularidad
5. $\angle KGH = \angle LHG$	5. Propiedad transitiva
6. $\angle KHG = \angle LGH$	6. Dado
7. GH = GH	7. Identidad
8. $\Delta KGH \cong \Delta LHG$	8. Criterio de congruencia ALA
9. KG = LH	9. Lados correspondientes en triángulos congruentes

♦

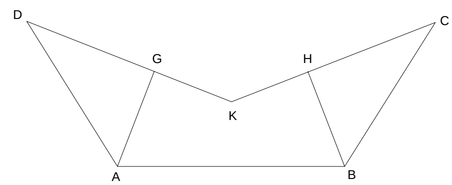
9.



AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\angle ECA = \angle DCB$	1. Identidad
2. AC = BC	2. Dado
3. $\angle CAE = \angle CBD$	3. Dado
4. $\Delta ACE \cong \Delta BCD$	4. Criterio de congruencia ALA

♦

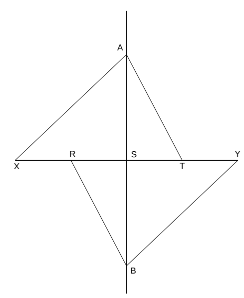
10. Datos: DG = CH, ∠D = ∠C, AG ⊥ DK, BH ⊥ CK. Demostrar : AD = BC.



AFIRMACIONES	RAZONES
1. DG = CH	1. Dado
2. ∠D = ∠C	2. Dado
3. AG ⊥ DK	3. Dado
4. ∠AGD = 90^{O}	4. Definición de perpendicularidad
5. BH ⊥ CK	5. Dado
6. ∠BHC = 90^{O}	6. Definición de perpendicularidad
7. ∠AGD = ∠BHC	7. Propiedad transitiva de la igualdad
8. ΔAGC ≅ ΔBHC	8. Criterio de congruencia ALA
9. AD = BC	9. Lados correspondientes en triángulos congruentes.

lqqd

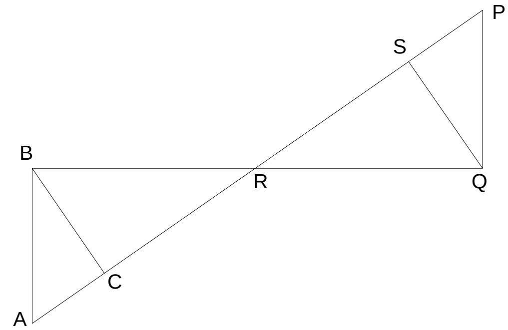
11.



AFIRMACIONES	RAZONES
1. L biseca a XY en S	1. Dado
2. XS = SY	2. Definición de bisecar
3. R punto medio de XS	3. Dado
4. SR = RS	4. Definición de punto medio
5. T punto medio de SY	5. Dado
6. ST = TY	6. Definición de punto medio
7. XS = XR + RS	7. (XRS)
8. SY = ST + TY	8. (STY)
9. XS = 2RS	9. Simplificación
10. ST = 2ST	10. Simplificación
11. RS = ST	11. Simplificación
12. XS + ST = RS + SY	12. Propiedad aditiva de la igualdad
13. XT = RY	13. (XST) y (RSY)
14. AT = BR	14. Dado
15. AX = BY	15. Dado
16. ΔXAT ≅ ΔYBR	16. Criterio de congruencia LLL
17. ∠ATX = ∠BRY	17. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes
18. ΔATS ≅ ΔBRS	18. Criterio de congruencia LAL
19. AS = BS	19. Lados correspondientes en triángulos congruentes

♦

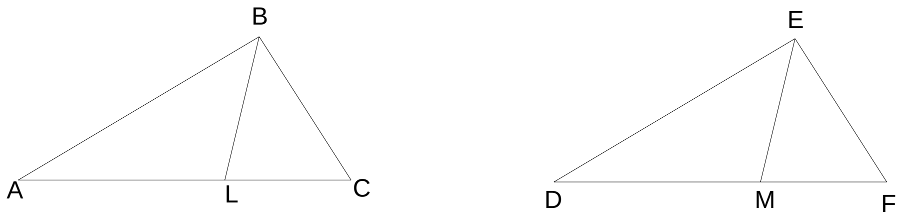
12.



AFIRMACIONES	RAZONES
1. $BC \perp PA$	1. Dado
2. $\angle RCB = 90^{O}$	2. Definición de perpendicularidad
3. $QS \perp PA$	3. Dado
4. $\angle RSQ = 90^{O}$	4. Definición de perpendicularidad
5. $\angle RCB = \angle RSQ$	5. Propiedad transitiva de la igualdad
6. $RC = RS$	6. Dado
7. $\angle BRC = \angle QRS$	7. Ángulos opuestos por el vértice
8. $\Delta BRC \cong \Delta QRS$	8. Criterio de congruencia ALA
9. $\angle BCA = 90^{O}$	9. Definición de perpendicularidad
10. $\angle QSP = 90^{O}$	10. Definición de perpendicularidad
11. $\angle BCA = \angle QSP$	11. Propiedad transitiva de la igualdad
12. $\angle BAR = \angle BAC$	12. (ACR)
13. $\angle QPR = \angle QPS$	13. (PSR)
14. $\angle BAR = \angle QPR$	14. Dado
15. $\angle BAC = \angle QPS$	15. Propiedad transitiva de la igualdad
16. $\angle CBA$ es complemento de $\angle BAC$	16. Definición de complemento
17. $\angle SQP$ es complemento de $\angle QPS$	17. Definición de complemento
18. $\angle CBA = \angle SQP$	18. Propiedad
19. $\therefore \angle ABC \cong \angle PQS$	19. Cambiando el orden
20. $BC = QS$	20. $\Delta BRC \cong \Delta QRS$
21. $\Delta ABC \cong \Delta PQS$	21. Criterio de congruencia ALA
22. $CA = SP$	22. Lados correspondientes en triángulos congruentes
23. $RC + CA = RS + SP$	23. Propiedad aditiva
24. $RA = RP$	24. (RCA) y (RSP)
25. R punto medio de AP	25. Definición
26. $AB = PQ$	26. Lados correspondientes en triángulos congruentes
27. $\Delta ABR \cong \Delta PQR$	27. Criterio de congruencia LAL
28. $BR = QR$	28. Lados correspondientes en triángulos congruentes
29. R punto medio de BQ	29. Definición
30. AP y BQ se bisecan	30. Definición

Qed

13.



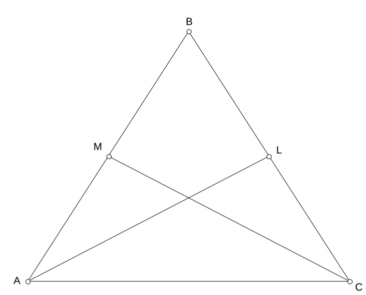
Sean dos triángulos congruentes $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Sean BL bisectriz de $\angle ABC$ y EM bisectriz del ángulo $\angle DEF$

P.D. BL = EM

AFIRMACIONES	RAZONES
1. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	1. Dado
2. AB = DE BC = EF AC = DF	2. Lados correspondientes en triángulos congruentes
3. $\angle A = \angle D$ $\angle B = \angle E$ $\angle C = \angle F$	3. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes
4. BL bisectriz de $\angle ABC$	4. Dado
5. $\angle ABL = \angle LBC$	5. Definición de bisectriz
6. $\angle ABC = 2\angle ABL$	6. Sustitución
7. EM bisectriz de $\angle DEF$	7. Dado
8. $\angle DEM = \angle MEF$	8. Definición de bisectriz
9. $\angle DEF = 2\angle DEM$	9. Sustitución
10. $2\angle ABL = 2\angle DEM$	10. Propiedad transitiva de la igualdad
11. $\angle ABL = \angle DEM$	11. simplificación
12. $\Delta ABL \cong \Delta DEM$	12. Criterio de congruencia ALA
13. BL = EM	13. Lados correspondientes en triángulos congruentes

♦

14. .



Sea ΔABC un triángulo isósceles con AB = BC. Sean AL y CM medianas.

P. D. AL = CM

AFIRMACIONES	RAZONES
1. ΔABC es isósceles	1. Dado
2. $\angle BAC = \angle BCA$	2. Propiedad de un triángulo isósceles
3. CM es mediana	3. Dado
4. M es punto medio de AB	4. Definición de mediana
5. AM = MB	5. Definición de punto medio
6. AL es mediana de BC	6. Dado

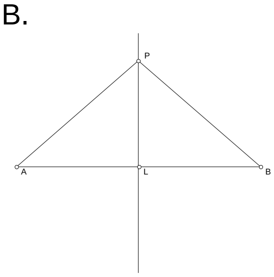
7. L es punto medio de BC	7. Definición de mediana
8. BL = LC	8. Definición de punto medio
9. AB = AM +MB	9. (AMB)
10. CB = CL + LB	10. (BLC)
11. AB = AM + AM	11. Sustitución
12. CB = CL + CL	12. Sustitución
13. AB = 2AM	13. Simplificación
14. CB = 2CL	14. Simplificación
15. 2AM = 2CL	15. Propiedad transitiva de la igualdad
16. AM = CL	16. Simplificación
17. $\angle MAC = \angle BAC$	17. (BMA)
18. $\angle LCA = \angle BCA$	18. (BLC)
19. $\angle MAC = \angle LCA$	19. Propiedad transitiva de la igualdad
20. AC = AC	20. Identidad
21. $\Delta MAC \cong \Delta LAC$	21. Criterio de congruencia LAL
22. CM = AL	22. Lados correspondientes en triángulos congruentes

$\therefore$ Las medianas son congruentes

♦

15. Sea AB un segmento cualquiera y *l* la mediatriz del segmento AB.
Se tienen que demostrar dos cosas:

a) Si $P \in l$, entonces P equidista de A y B.

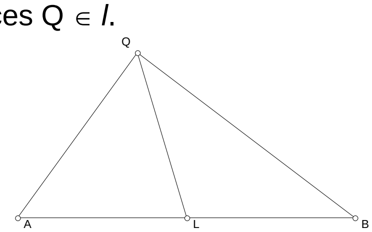


Sea L punto medio de AB.

AFIRMACIONES	**RAZONES**
1. L punto medio de AB	1. Dado
2. AL = LB	2. Definición de punto medio
3. $LP \perp AB$	3. Definición de mediatriz
4. $\angle ALP = 90^o$	4. Definición de perpendicularidad
5. $\angle BLP = 90^o$	5. Definición de perpendicularidad
6. $\angle ALP = \angle BLP$	6. Transitividad
7. LP = LP	7. Identidad
8. $\Delta ALP \cong \Delta BLP$	8. Criterio de congruencia LAL
9. AP = BP	9. Lados correspondientes en triángulos congruentes
$\therefore$ P equidista de A y B	10. Definición de equidistar

♦

b) Si Q equidista de A y B, entonces $Q \in l$.



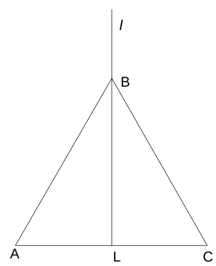
AFIRMACIONES	**RAZONES**

1. Q equidista de A y B	1. Dado
2. AQ = QB	2. Definición de equidistar
3. L es punto medio de AB	3. Dado
4. AL = LB	4. Definición de punto medio
5. LQ = LQ	5. Identidad
6. $\Delta AQL \cong \Delta BQL$	6. Criterio de congruencia LLL
7. $\angle QLA = \angle QLB$	7. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes
8. $\angle QLA + \angle QLB = 180^{O}$	8. Ángulos suplementarios
9. $2\angle QLA = 180^{O}$	9. Simplificación
10. $\angle QLA = 90^{O}$	10. Simplificación
11. $\angle QLB = 90^{O}$	11. Transitividad
12. $QL \perp AB$	12. Definición de perpendicularidad
13. QL es mediatriz	13. Definición de mediatriz

$\therefore Q \in l$

qed

16. Sea ABC un triángulo equilátero. spg sea *l* bisectriz de $\angle ABC$.
P. D. *l* es mediana



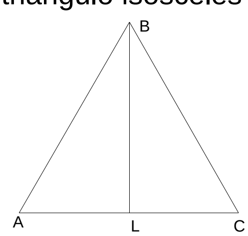
Sea L la intersección de la recta *l* con el segmento AC

AFIRMACIONES	**RAZONES**
1. ΔABC es equilátero	1. Dado
2. AB = BC = CA	2. Definición de triángulo equilátero
3. *l* es bisectriz	3. Dado
4. $\angle ABL = \angle LBC$	4. Definición de bisectriz
5. BL = BL	5. Identidad
6. $\Delta ABL \cong \Delta CBL$	6. Criterio de congruencia LAL
7. AL = CL	7. Lados correspondientes en triángulos congruentes
8. L es punto medio de AC	8. Definición de punto medio
9. BL es mediana	9. Definición de mediana

$\therefore$ *l* es mediana ♦

17. Si se demuestran las siguientes implicaciones, es suficiente:
Bisectriz $\Rightarrow$ Mediana $\Rightarrow$ Mediatriz $\Rightarrow$ Altura $\Rightarrow$ Bisectriz
Sea ABC un triángulo isósceles tal que AB = BC

a) La bisectriz del ángulo desigual en un triángulo isósceles es mediana.

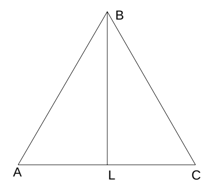


Sea L en el segmento AC tal que BL es bisectriz de $\angle ABC$

AFIRMACIONES	RAZONES
1. AB = BC	1. Dado
2. BL es bisectriz	2. Dado
3. $\angle ABL = \angle CBL$	3. Definición de bisectriz
4. BL = BL	4. Identidad
5. $\Delta ABL \cong \Delta CBL$	5. Criterio de congruencia LAL
6. AL = CL	6. Lados correspondientes en triángulos congruentes
7. L es punto medio de AC	7. Definición de punto medio
8. BL es mediana	8. Definición de mediana

♦

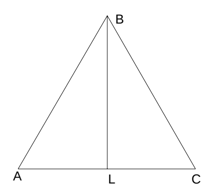
b) La mediana del lado desigual en un triángulo isósceles es mediatriz.
Sea L punto medio de AC



AFIRMACIONES	RAZONES
1. L punto medio de AC	1. Dado
2. BL es mediana	2. Definición de mediana
3. AL = LC	3. Definición de punto medio
4. $\angle LAB = \angle LCB$	4. Propiedad de triángulos isósceles
5. AB = BC	5. Dado
6. $\Delta BAL \cong \Delta BCL$	6. Criterio de congruencia LAL
7. $\angle ALB = \angle CLB$	7. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes
8. $\angle ALB + \angle CLB = 180^{O}$	8. Ángulos suplementarios
9. $2\angle ALB = 180^{O}$	9. Simplificación
10. $\angle ALB = 90^{O}$	10. Simplificación
11. $BL \perp AC$	11. Definición de perpendicularidad
12. BL es mediatriz	12. Definición de mediatriz

♦

c) La mediatriz del lado desigual de un triángulo isósceles es altura.
Sea L punto medio de AC, sea l la mediatriz del lado AC.
P. D. $B \in l$

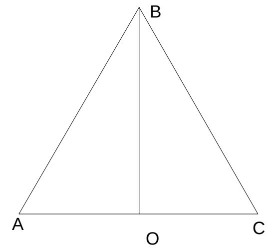


AFIRMACIONES	RAZONES
1. L punto medio de AC	1. Dado
2. AB = BC	2. Dado
3. B equidista de A y C	3. Definición de equidistar
4. $B \in l$	4. Propiedad de l
5. BL es mediatriz	5. Definición de mediatriz
6. $\angle BLA = 90^{O}$	6. Definición de mediatriz

7. BL $\perp$ AC	7. Definición de perpendicularidad
8. BL es altura	8. Definición de altura

♦

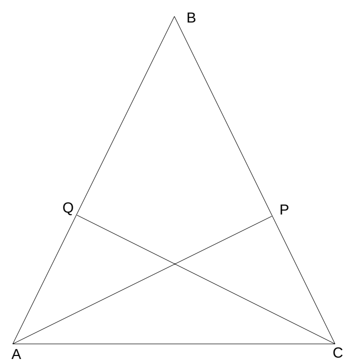
d) La altura al lado desigual de un triángulo isósceles es bisectriz del ángulo desigual.
Sea O en AC, tal que BO es altura



AFIRMACIONES	**RAZONES**
1. BO es altura	1. Dado
2. BO $\perp$ AC	2. Definición de altura
3. $\angle BOA = 90^{O}$ y $\angle BOC = 90^{O}$	3. Definición de perpendicularidad
4. $\angle BOA = \angle BOC$	4. Transitividad
5. AB = BC	5. Dado
6. BO = BO	6. Identidad
7. $AO^2 = AB^2 – BO^2$	7. Teorema de Pitágoras
8. $CO^2 = AB^2 – BO^2$	8. Teorema de Pitágoras
9. $AO^2 = CO^2$	9. Transitividad
10. AO = CO	10. Simplificación
11. $\Delta ABO \cong \Delta CBO$	11. Criterio de congruencia LLL
12. $\angle ABO = \angle CBO$	12. Lados correspondientes en triángulos congruentes
13. BO es bisectriz	13. Definición de bisectriz

♦

18. Sea ABC un triángulo con AP y CQ alturas tales que AP = CQ.
P. D. ABC es isósceles



AFIRMACIONES	**RAZONES**
1. AP = CQ	1. Dado
2. $\angle APC = 90^{O}$	2. AP es altura
3. $\angle CQA = 90^{O}$	3. CQ es altura
4. AC = AC	4. Identidad
5. $AC^2 = AP^2 + PC^2$	5. Teorema de Pitágoras
6. $AC^2 = CQ^2 + QA^2$	6. Teorema de Pitágoras

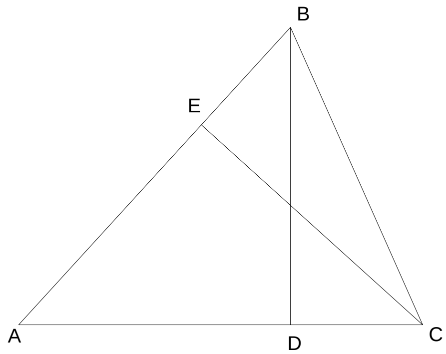
7. $AP^2 + PC^2 = CQ^2 + QA^2$	7. Transitividad
8. $AP^2 = CQ^2$	8. Propiedad multiplicativa
9. $PC^2 = QA^2$	9. Simplificación
10. $PC = QA$	10. Simplificación
11. $\Delta AQC \cong \Delta CPA$	11. Criterio de congruencia LLL
12. $\angle QAC = \angle PCA$	12. Ángulos correspondientes en triángulos congruentes
13. $\angle BAC = \angle QAC$	13. (BQA)
14. $\angle BCA = \angle PCA$	14. (BPC)
15. $\angle BAC = \angle BCA$	15. Transitividad
16. ΔABC es isósceles	16. Propiedad de los triángulos isósceles

♦

8.3 Ejercicios 4.3

1. Las alturas trazadas a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes.

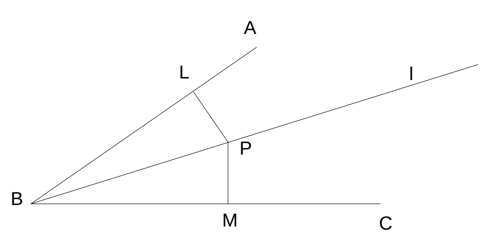
Sea ΔABC isósceles con AB = AC. Sean CE y BD las alturas a AB y AC, respectivamente.
P. D. CE = BD



AFIRMACIONES	RAZONES
1. BD es altura	1. Dado
2. $\angle BDA = 90^o$	2. Definición de altura
3. CE es altura	3. Dado
4. $\angle CEA = 90^o$	4. Definición de altura
5. $\angle BDA = \angle CEA$	5. Transitividad
6. $\angle DAB = \angle EAC$	6. Identidad
7. $\angle ABD = \angle ACE$	7. Suma de ángulos internos de un triángulo
8. ΔABC es isósceles	8. Dado
9. AB = AC	9. Definición de triángulo isósceles
10. $\Delta BAD \cong \Delta CAE$	10. Criterio de congruencia ALA
11. BD = CE	11. Lados correspondientes en triángulos congruentes

qed

2. La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos tales que equidistan a dos rectas dadas. Las rectas, son las que forman los lados del ángulo.
Sea $\angle ABC$ un ángulo cualquiera. Sea l bisectriz de dicho ángulo.
Se tienen que demostrar dos cosas:
a) Si $P \in l$, entonces P equidista de las rectas AB y BC
Sean L un punto en la recta AB, tal que PL es la distancia de P a la recta AB y M un punto en la recta BC, tal que PM es la distancia de P a la recta BC.
P. D. P equidista de $\overleftrightarrow{AB}$ y de $\overleftrightarrow{BC}$



AFIRMACIONES	RAZONES
1. BP es bisectriz de $\angle ABC$	1. Construcción

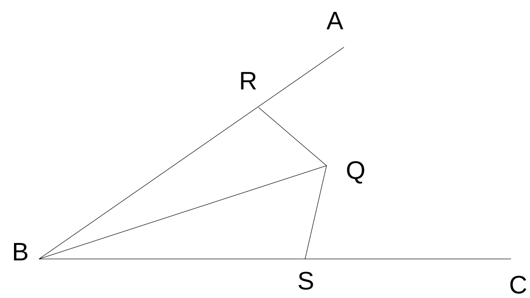
2. $\angle ABP = \angle PBC$	2. Definición de bisectriz
3. PL es la distancia a $\overleftrightarrow{AB}$	3. Dado
4. $PL \perp AB$	4. Definición de distancia
5. $\angle PLB = 90^o$	5. Definición de Perpendicularidad
6. PM es la distancia a $\overleftrightarrow{BC}$	6. Dado
7. $PM \perp BC$	7. Definición de distancia
8. $\angle PMB = 90^o$	8. Definición de perpendicularidad
9. $\angle PLB = \angle PMB$	9. Transitividad
10. $\angle ABP = \angle LBP$	10. (ALB)
11. $\angle PBC = \angle PBM$	11. (BMC)
12. $\angle LBP = \angle PBM$	12. Transitividad
13. $\angle BPL = \angle BPM$	13. Suma de ángulos interiores de un triángulo
14. BP = BP	14. Identidad
15. $\Delta BPL \cong \Delta BPM$	15. Criterio de congruencia ALA
16. PL = PM	16. Lados correspondientes en triángulos congruentes

lqqd

b) Si Q es un punto que equidista de AB y BC, entonces $Q \in l$

Sea Q un punto tal que equidista de las rectas AB y BC. Sean los puntos R sobre la recta AB de manera que QR es la distancia de Q a AB, y S sobre la recta BC de modo que QS es la distancia de Q a BC, luego SQ = RQ.

P. D. $Q \in l$



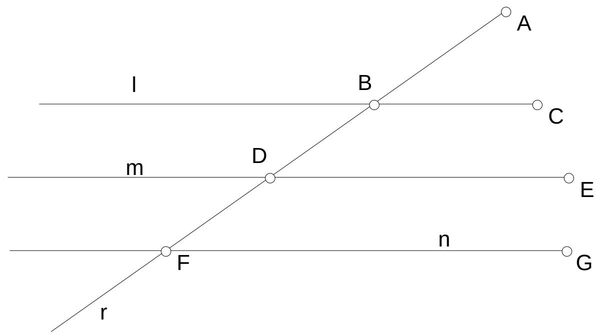
AFIRMACIONES	**RAZONES**
1. QR es distancia de Q a $\overleftrightarrow{AB}$	1. Dado
2. $QR \perp AB$	2. Definición de distancia
3. $\angle QRB = 90^o$	3. Definición de perpendicularidad
4. QS es distancia de Q a $\overleftrightarrow{BC}$	4. Dado
5. $QS \perp BC$	5. Definición de distancia
6. $\angle QSB = 90^o$	6. Definición de perpendicularidad
7. $\angle QRB = \angle BSB$	7. Transitividad
8. RQ = SQ	8. Dado
9. BQ = BQ	9. Identidad
10. $BR^2 = BQ^2 - RQ^2$	10. Teorema de Pitágoras
11. $BS^2 = BQ^2 - SQ^2$	11. Teorema de Pitágoras
12. $BR^2 = BS^2$	12. Transitividad
13. BR = BS	13. Simplificación
14. $\Delta BRQ \cong \Delta BSQ$	14. Criterio de congruencia LLL
15. $\angle RBQ = \angle SBQ$	15. ángulos correspondientes en triángulos congruentes
16. $\angle ABQ = \angle RBQ$	16. (ARB)
17. $\angle CBQ = \angle SBQ$	17. (BSC)
18. $\angle ABQ = \angle CBQ$	18. Transitividad

19. BQ es bisectriz	19. Definición de bisectriz
20. Q $\in$ l	20. Propiedad

qed

3. En un plano, si dos rectas son paralelas a una tercera, entonces son paralelas entre sí.

   Sean l, m y n tres rectas tales que l $\parallel$ m y l $\parallel$ n. P. D. m $\parallel$ n

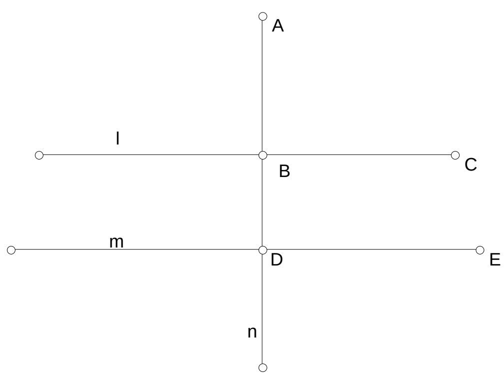


Como l $\parallel$ m $\Rightarrow$ $\angle$ABC = $\angle$ADE pues son ángulos correspondientes entre paralelas, también l $\parallel$ n $\Rightarrow$ $\angle$ABC = $\angle$AFG que son ángulos correspondientes
$\Rightarrow$ por transitividad se tiene $\angle$ADE = $\angle$AFG
$\Rightarrow$ m $\parallel$ n por el Teorema de paralelas

♦

4. En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra.

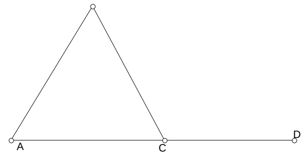
   Sean l, m y n tres rectas tales que l $\perp$ n y l $\parallel$ m. P. D. n $\perp$ m



Se tiene que l $\perp$ n $\Rightarrow$ $\angle$ABC = 90^o por definición de perpendicularidad, también se tiene l $\parallel$ m $\Rightarrow$ $\angle$ABC = $\angle$ ADE ya que son ángulos correspondientes entre paralelas
$\Rightarrow$ por transitividad $\angle$ADE = 90^o
$\therefore$ n $\perp$m , por definición de perpendicularidad

♦

5. En todo triángulo, el ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.
   Sea ABC un triángulo cualquiera. spg sea D un punto tal que (ABD).
   P. D. $\angle$CBD = $\angle$BAC + $\angle$ACB

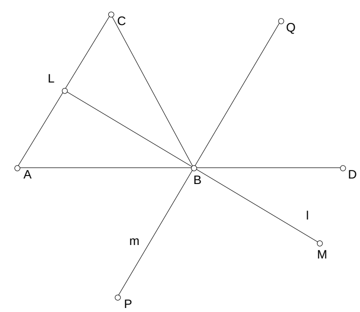


Por suma de ángulos internos del triángulo ABC, se tiene
$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^o$
Luego, como $\angle CBA$ y $\angle CBD$ son ángulos suplementarios, se tiene
$\angle CBA + \angle CBD = 180^o$
Por transitividad se tiene $\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = \angle CBA + \angle CBD$
Cancelando los términos congruentes se tiene $\angle BAC + \angle ACB = \angle CBD$
Análogamente se demuestra para los otros ángulos faltantes.

qed

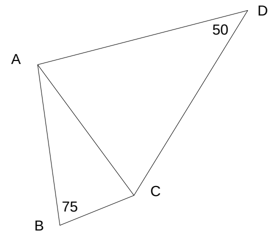
6. Mostrar que la bisectriz de un ángulo interno y la bisectriz del ángulo externo correspondiente, se cortan perpendicularmente.
   Sea ABC un triángulo cualquiera. spg Sean l bisectriz interna de $\angle ABC$ y m bisectriz externa de $\angle ABC$
   P.D. $l \perp m$

   Sea D, tal que (ABD), Sean P y Q en la recta m, tales que (PBQ)
   Sea L en el segmento AC tal que L es la intersección de l con AC
   Sea M un punto tal que (LBM)



   Se tiene que l es bisectriz interna de $\angle ABC$, como L es un punto en la bisectriz l, por definición de bisectriz se tiene $\angle ABL = \angle CBL$
   Se tiene que m es bisectriz externa de $\angle ABC$, como Q es un punto en m, por definición se tiene $\angle CBQ = \angle DBQ$
   Ahora, se tiene también $\angle ABC + \angle CBD = 180^o$, ya que son ángulos suplementarios
   Sustituyendo: $\angle ABC = 2\angle CBL$ y $\angle CBD = 2\angle CBQ$, de donde $2\angle CBL + 2\angle CBQ = 180^o$ Simplificando: $\angle CBL + \angle CBQ = 90^o$, sumando los ángulos $\angle LBQ = 90^o$
   Luego, por definición de perpendicularidad $LB \perp BQ$
   $\therefore\ l \perp m$
   Análogamente con cualquier otro ángulo ■
7. Las medidas de los ángulo de un triángulo están en la razón 1:2:3. Hallar la medida de cada ángulo.
   Sea ABC un triángulo cualquiera.
   spg $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$
   $\angle A + \angle B + \angle C = 180$, por suma de ángulos internos de un triángulo
   Por hipótesis $\angle A : \angle B = 1 : 2$, de donde $\angle B = 2\angle A$
   También $\angle A : \angle C = 1 : 3$, lo que implica $\angle C = 3\angle A$
   Sustituyendo: $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + 2\angle A + 3\angle A = 6\angle A$
   Luego $6\angle A = 180^o$, por lo que $\angle A = 30^o$
   Por lo tanto $\angle A = 30^o$, $\angle B = 60^o$ y $\angle C = 90^o$
   Análogamente con cualquier otro orden que cumpla la proporción dada.

8. En la siguiente figura AD = DC, AB = AC, el ángulo $\angle ABC$, mide 75^0 y el ángulo $\angle ADC$ mide 50^0. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BAD$? (Examen Canguro Matemático 2000, OMM)



Por hipótesis se tiene AD = DC, entonces el triángulo ADC es isósceles. Por propiedad de los triángulos isósceles $\angle DAC = \angle DCA$

También por hipótesis $\angle ADC = 50^o$, de donde por suma de ángulos internos se tiene que $\angle DAC + \angle DCA = 130^o$, y como estos son congruentes, entonces $\angle DAC = 75^o$

Por otra parte AB = AC por hipótesis, luego el triángulo BAC es isósceles, de donde $\angle ABC = \angle ACB$, entonces también $\angle ACB = 75^o$

Por suma de ángulos internos $\angle BAC = 50^o$.

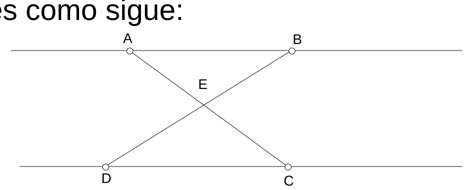
Como $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$, entonces $\angle BAD = 50^o + 75^o$

Por lo tanto $\angle BAD = 125^o$

qed

9. ¿Cuánto vale el ángulo x, si las rectas son paralelas? (Examen de Ubicación, OMMor 1999)

Si ponemos nombres a los vértices como sigue:



x = $\angle AED$, $\angle ABD = 40^o$, $\angle DCA = 100^o$ y AB $||$ DC

También $\angle ABD = \angle CDB$ ya que son alternos internos, entonces $\angle CDB = 40^o$

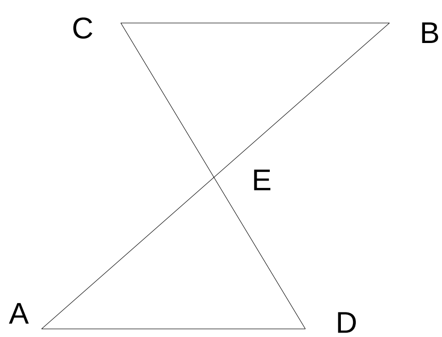
$\angle AED = \angle DCE + \angle EDC$ por propiedad de los ángulos en un triángulo

$\angle DCE + \angle EDC = \angle DCA + \angle BDC$ ya que (DEB) y (AEC)

Pero se tiene $\angle DCA + \angle BDC = 100^o + 40^o = 140^o$

Por lo tanto x = 140^o

10. En la figura, AB y CD se bisecan en E. Demostrar que AD $||$ CB.



Como AB y CD se bisecan, por definición se tiene AE = BE y EC = ED

Por un problema resuelto antes, se tiene CB = DA

Luego $\Delta AED \cong \Delta BEC$ por el criterio de congruencia LLL

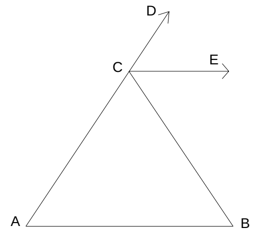
De donde $\angle CBE = \angle DAE$ por ser ángulos correspondientes en triángulos congruentes

$\angle CBA = \angle DAB$ pues (BEA)

Pero se tiene que $\angle CBA$ y $\angle DAB$ son alternos internos

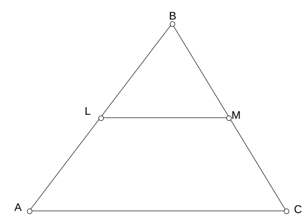
Luego CB $\parallel$ DA

11. En la siguiente figura, AC = BC y $\angle$DCE = $\angle$B. Demostrar que $\overrightarrow{CE}$ || AB.



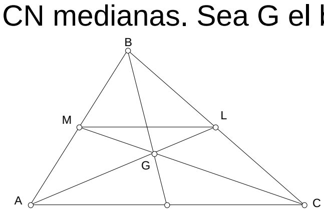
Por hipótesis se tiene que $\angle$DCE = $\angle$B, también que AC = BC, de esto se deduce que el triángulo ΔABC es isósceles
Por una propiedad de los triángulos isósceles se tiene $\angle$A = $\angle$B
Usando la propiedad transitiva de la igualdad $\angle$A = $\angle$DCE
Como $\angle$A y $\angle$DCE son correspondientes entre dos rectas, entonces CE || AB
♦

12. Mostrar que en cualquier triángulo, los puntos medios de uno dos lados, forman un segmento paralelo al tercer lado e igual a la mitad de este.
Sea ABC un triángulo con L y M puntos medios de AB y BC, respectivamente.
P.D. LM || AC y LM = ½ AC



$\angle$ABC = $\angle$LBM, ya que (ALB) y (CMB)
L es punto medio de AB, entonces BL = LA, luego AB = 2BL
M es punto medio de BC, entonces BM = MC, luego BC = 2BM
Así se tiene: $\frac{BL}{BA} = \frac{1}{2}$ y $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC}$ por transitividad
Luego ΔABC ≈ ΔLBM, por el criterio de semejanza LAL
Luego, como son ángulos correspondientes en triángulos semejantes se tiene
$\angle$BLM = $\angle$BAC, y como estos ángulos son alternos interno entre dos rectas, entonces LM || AC
Además $\frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{LM}{AC}$, de donde $\frac{LM}{AC} = \frac{1}{2}$
Por lo tanto LM = ½ AC

13. En todo triángulo, las medianas se cortan en proporción 1:2.
Sea ABC un triángulo con AL, BM y CN medianas. Sea G el baricentro del triángulo



spg P. D. $\frac{CG}{GM} = \frac{2}{1}$

AL es mediana, luego L es punto medio de BC; CM es mediana, luego M es punto medio de AB. Entonces LM || AC y LM = ½ AC
$\angle$MLA = $\angle$CAL y $\angle$LMC = $\angle$ACM ya que son alternos internos
Luego ΔMLG ≈ ΔCAG por el criterio de semejanza AA
Entonces se tienen las siguientes proporciones:

$$\frac{ML}{CA}=\frac{LG}{GA}=\frac{GM}{GC}$$ y como $\frac{ML}{CA}=\frac{1}{2}$, entonces $\frac{MG}{GC}=\frac{LG}{GA}=\frac{1}{2}$

Análogamente ocurre con la mediatriz BN

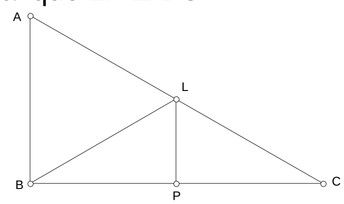
14. Demostrar que el centro de la circunferencia circunscrita de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.

Sea ABC un triángulo rectángulo tal que $\angle ABC = 90^o$

Sea L punto medio de AC

P.D. L es el circuncentro del triángulo

Sea P un punto en el segmento BC, tal que $LP \perp BC$



AFIRMACIONES	RAZONES
1. L es punto medio de AC	1. Dado
2. AL = LC	2. Definición de punto medio
3. $\angle ABC = 90^O$	3. Dado
4. $LP \perp BC$	4. Definición de perpendicularidad
5. $\angle LPC = 90^o$	5. Construcción
6. LP || AB	6. Propiedad demostrada en ejercicio
7. $\Delta ABC \approx \Delta LPC$	7. Teorema de Thales
8. $\frac{CL}{LA}=\frac{CP}{PB}$	8. Propiedad de semejanza de triángulos
9. $\frac{CL}{LA}=1$	9. CL = LA
10. $\frac{CP}{PB}=1$	10. Transitividad
11. CP = PB	11. Propiedad de proporciones
12. P es punto medio de CB	12. Definición de punto medio
13. LP es mediana de BC	13. Definición de mediana
14. $LP \perp BC$	14. Construcción
15. LP es mediatriz de BC	15. Definición de mediatriz
16. ΔBLC es isósceles	16. Propiedad de triángulo isósceles
17. BL = LC	17. Definición de punto medio
18. AL = LC = BL	18. Transitividad
19. A, B, C equidistan de L	19. Definición de equidistar
20. L es circuncentro de ΔABC	20. Propiedad de circuncentro

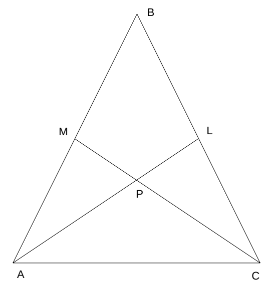
■

15. Todo triángulo con medianas congruentes es isósceles.

Sea ABC un triángulo tal que AL y CM son medianas y AL = CM.

P. D. ABC es isósceles.

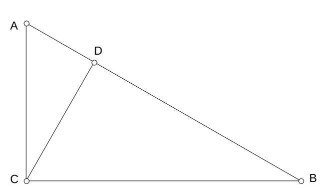
Sea P la intersección de AL y MC.



AFIRMACIONES	RAZONES
1. AL es mediana	1. Dado
2. L es punto medio de BC	2. Definición de mediana
3. BL = LC	3. Definición de punto medio
4. CM es mediana	4. Dado
5. M es punto medio de BA	5. Definición de mediana
6. BM = MA	6. Definición de punto medio
7. AL = CM	7. Dado
8. P es intersección de Al y CM	8. Dado
9. P es el baricentro	9. Definición de baricentro
10. $\frac{CP}{PM} = \frac{2}{1}$	10. Propiedad de mediana y baricentro
11. $\frac{AP}{PL} = \frac{2}{1}$	11. Propiedad de mediana y baricentro
12. $\frac{CP}{PM} = \frac{AP}{PL}$	12. Transitividad
13. $\frac{CP + PM}{PM} = \frac{AP + PL}{PL}$	13. Propiedad de proporciones
14. $\frac{CM}{PM} = \frac{AL}{PL}$	14. (CPM) y (APL)
15. CM*PL = AL*PM	15. Propiedad de proporciones
16. PL = PM	16. Simplificación
17. CM – MP = AL – LP	17. Aditividad
18. CP = AP	18. Simplificación
19. ΔAPC es isósceles	19. Definición de triángulo isósceles
20. $\angle$PAC = $\angle$PCA	20. Propiedad de triángulo isósceles
21. MC = LA	21. Dado
22. AC = AC	22. Identidad
23. ΔAMC $\cong$ ΔCLA	23. Criterio de congruencia LAL
24. AM = CL	24. Lados correspondientes en triángulos congruentes
25. AM = MB = BL = LC	25. Transitividad
26. AB = BC	26. Aditividad
27. ΔABC es isósceles	27. Definición de triángulo isósceles

qed

16. En el triángulo ΔABC, el $\angle$ACB es un ángulo recto y CD $\perp$ AB. Demostrar que $\angle$A = $\angle$BCD.

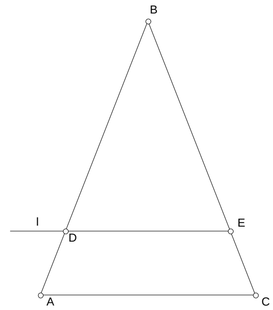


Como hipótesis se tiene $\angle$ACB = 90^{o} y CD $\perp$ AB , entonces $\angle$CDB = 90^{O}

Por lo que $\angle$ACB = $\angle$DCB, luego $\angle$CBA = $\angle$DBC ya que (ADB)

Entonces, por el criterio AA de semejanza, se tiene $\Delta ACB \approx \Delta CDB$
De donde $\angle BAC = \angle BCD$ por ser ángulos correspondientes en triángulos semejantes
Entonces $\angle A = \angle BCD$

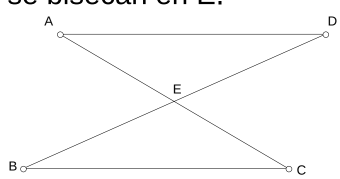
17. Demostrar que una recta paralela a la base de un triángulo isósceles y que interseca a los otros dos lados en puntos diferentes, determina otro triángulo isósceles.



Sea ΔABC un triángulo isósceles tal que AB = BC
Sean D en AB y E en BC de modo que DE || AC, $D \neq E$
P. D. ΔDBE es isósceles

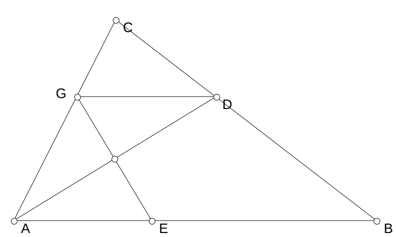
Como DE || AC, entonces $\Delta ABC \approx \Delta DBE$ por el Teorema de Thales
Entonces $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$, por lo que utilizando las propiedades de las proporciones se tiene BD*BC = BE*BA, y como por hipótesis BC = BA, entonces BD = BE
Luego ΔDBE es isósceles

18. Se tiene que AC y BD se intersecan en E, con (AEC) y (DEB), tal que AD = BC y AD || BC. Demostrar que AC y BD se bisecan en E.



Como AD || BC, entonces $\angle ADB = \angle CBE$ y $\angle DAC = \angle BCA$
AD = BC, $\Delta ADE \cong \Delta CBE$, DE = BE y AE = CE
E es punto medio de BD y AC
AC y BD se bisecan

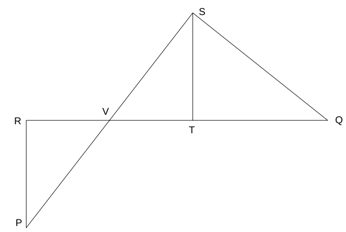
19. En el triángulo ΔABC, la bisectriz de $\angle A$ interseca a BC en D. La mediatriz de AD interseca a AC en G. Demostrar que GD || AB.



Sea E un punto que esta en AB, tal que es la intersección de la mediatriz de AD y AB.
Como G está en la mediatriz de AD entonces G equidista de A y D,
de donde AG = GD; entonces por definición ΔAGD es isósceles
Luego $\angle GAD = \angle ADG$
Como AD es bisectriz de $\angle BAC$ se tiene que $\angle BAD = \angle CAD$.

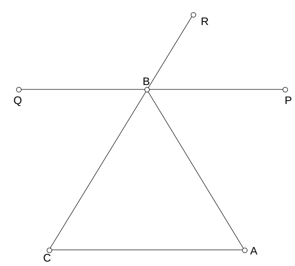
También como A, G y C son colineales (AGC), se tiene que $\angle GAD = \angle CAD$
De donde $\angle BAD = \angle ADG$ por transitividad.
Como $\angle BAD$ y $\angle ADG$ son alternos internos, entonces AB || DG

20. En la figura, $PR \perp RQ$, $ST \perp RQ$ y $SQ \perp PS$. Demostrar que $\angle P = \angle Q$.



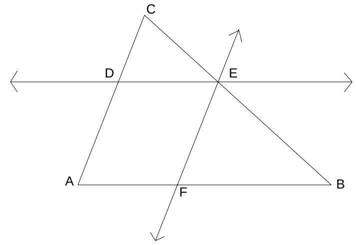
Por hipótesis se tiene que $PR \perp RQ$, $ST \perp RQ$, luego por un problema ya resuelto se tiene que PR || ST, de donde $\angle RPV = \angle STV$, por ser alternos internos
Ahora $SQ \perp PS$, de donde $\angle QSB = 90^{O}$, también $ST \perp RQ$, luego $\angle STV = 90^{o}$
Por lo que $\angle QSV = \angle STV$
Además $\angle SVQ = \angle TVS$ ya que son el mismo ángulo pues (VTQ)
Entonces $\Delta QSV \cong \Delta STV$ por criterio de semejanza AA
Luego $\angle SQV = \angle TSV$ por ser ángulos correspondientes en triángulos semejantes.
De tal manera que $\angle RPV = \angle SQV$ por propiedad transitiva
Por lo tanto $\angle P = \angle Q$

21. Demostrar que si la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo es paralela a un lado del triángulo, éste es isósceles.
Sea ΔABC un triángulo tal que si l es bisectriz externa de $\angle ABC$ y l || AC
P.D. ΔABC es isósceles
Sean P y Q dos puntos en l tales que (PBQ)
Sea R tal que (RBC)



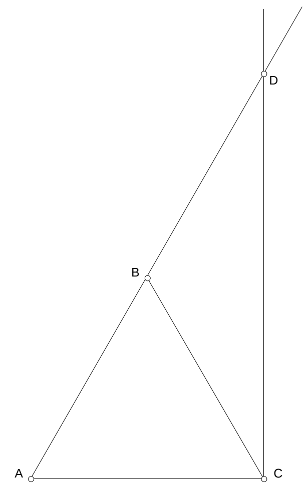
$\angle PBA = \angle CAB$ ya que PQ || AC
$\angle RBP = \angle PBA$ ya que l es bisectriz
$\angle RBP = \angle CBQ$ ya que son opuestos por el vértice
$\angle QBC = \angle ACB$ ya que PQ || AC
entonces $\angle CAB = \angle ACB$ por transitividad
Por lo tanto ΔABC es isósceles

22. En la figura, $\overleftrightarrow{DE} \mid\mid AB$, $\overleftrightarrow{EF} \mid\mid AC$, y D es el punto medio de AC. Demostrar que $\Delta CDE \cong \Delta EFB$.



$AC \parallel EF \Rightarrow \angle CDE = \angle DEF$ y $\angle ADF = \angle DFE$
$DE \parallel AB \Rightarrow \angle EDF = \angle DFA$
DF = DF
Luego $\Delta ADF \cong \Delta EFD \Rightarrow AD = EF$
$\angle DCE = \angle FEB$ ya que $AC \parallel EF$
$\angle DEF = \angle EFB$ ya que $DE \parallel AB$
$\Rightarrow \angle CDE = \angle EFB$ por transitividad
Como D es punto medio $\Rightarrow AD = DC \Rightarrow DC = EF$ por transitividad
Luego $\Delta CDE \cong \Delta EFB$ por el criterio de congruencia ALA

23. Se da un triángulo equilátero, ΔABC. En el rayo opuesto a $\overrightarrow{BA}$, tómese el punto D tal que BD = AC. Demuéstrese que $\angle BCD = 30^0$.



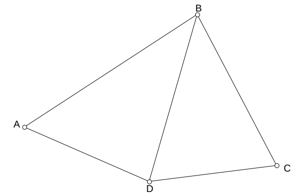
ΔABC es equilátero $\Rightarrow AB = BC = CA$
Como $BD = AC \Rightarrow AB = BD \Rightarrow \Delta DBC$ es isósceles
$\angle ABC = 60^o$ por propiedad de los triángulos equiláteros $\Rightarrow \angle DBC = 120^o$ por ser ángulos suplementarios
$\angle BDC = \angle BCD$ ya que ΔDBC es isósceles

$$\Rightarrow \angle BDC = \frac{180-120}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Por lo tanto $\angle BCD = 30^o$

8.4 Ejercicios 5.2

1. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo es igual a 360^0.

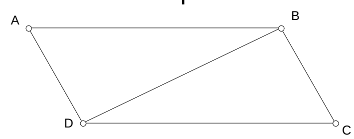


Sea ABCD un cuadrilátero convexo. P. D. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^O$

BD es una diagonal. En el triángulo ABD la suma de los ángulos internos es 180^o, así como en el triángulo DBC, luego ABCD es la unión de ambos triángulos, por lo que la suma de sus ángulos interiores es la suma de los ángulos interiores de ambos triángulos

Por lo tanto $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^O$

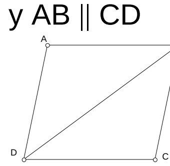
2. En un paralelogramo, los lados opuestos cualesquiera son congruentes.



Sea ABCD un paralelogramo P. D. AB = DC y AD = BC

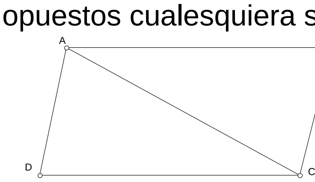
$\angle ABD = \angle CBD$ ya que AB || DC
$\angle BDA = \angle DBC$ ya que AD || BC
BD = BD
$\Delta ABD \cong \Delta CDB$ por criterio de congruencia ALA
AB = CD y AD = BC por ser lados correspondientes entre triángulos congruentes

3. Si un lado de un cuadrilátero es igual y paralelo a su lado opuesto, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
   Sea ABCD un cuadrilátero tal que AB = CD y AB || CD



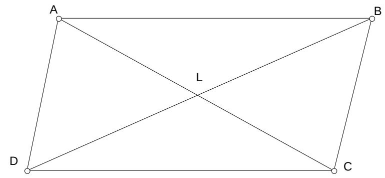
AB = CD por hipótesis
Así también AB || CD $\Rightarrow \angle ABC = \angle CDB$
BD = DB
$\Delta ABD \cong \Delta CDB$ por criterio de congruencia ALA
$\Rightarrow \angle BDA = \angle DBC \Rightarrow$ BC || DA
Por lo tanto ABCD es un paralelogramo

4. En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.



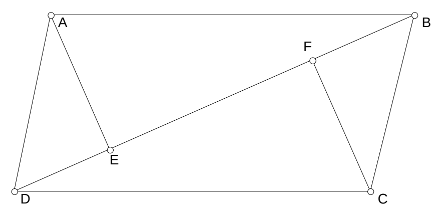
spg P. D. $\angle A = \angle C$
$\angle A = \angle BAC + \angle CAD$, así mismo $\angle C = \angle DCA + \angle ACB$
$\angle BAC = \angle DCA$ ya que AB || CD, y $\angle CAD = \angle ACB$ ya que BC || DA
$\Rightarrow \angle BAC + \angle CAD = \angle DCA + \angle ACB$
Por lo tanto $\angle A = \angle C$
Análogamente $\angle B = \angle D$

5. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.
   Sea L el punto de intersección de AC y BD
   P. D. L es punto medio de AC y BD

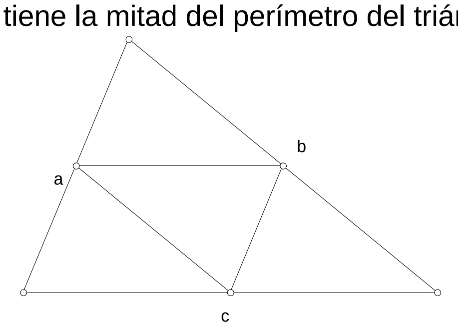


   $\angle$ABL = $\angle$CDL   ya que AB || DC
   AB = CD
   $\angle$LAB = $\angle$LCD ya que AB || DC
   ΔABL $\cong$ ΔCDL por criterio de congruencia ALA
   entonces BL = DL y AL = CL
   por lo tanto L es punto medio de BD y AC

6. Se dan un paralelogramo y una de sus diagonales. Demostrar que si se trazan segmentos desde los vértices opuestos, perpendiculares a la diagonal, entonces dichos segmentos son paléelos y congruentes.

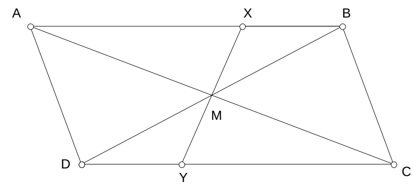


   Sea ABCD un paralelogramo. DB una diagonal. E un punto en BD tal que AE $\perp$ BD y F en BD tal que CF $\perp$ BD   P. D. AE = CF y AE || CF
   AE $\perp$ BD $\Rightarrow$ $\angle$ABD = 90; CF $\perp$ BD $\Rightarrow$ $\angle$CFB = 90, así que por transitividad
   $\angle$ABD = $\angle$CFB ; además por ambas relaciones se tiene AE || CF por un problema ya resuelto
   $\angle$ADE = $\angle$CBF ya que son alternos internos en las paralelas BC || DA
   $\Rightarrow$ $\angle$DAE = $\angle$BCF; luego, por otro problema ya resuelto DA = BC
   $\Rightarrow$ ΔADE $\cong$ ΔCBF
   Por lo tanto AE = CF por ser lados correspondientes en triángulos congruentes
7. Se da cualquier triángulo y los puntos medios de los lados. Demostrar que el perímetro del triángulo formado por los puntos medios tiene la mitad del perímetro del triángulo original.



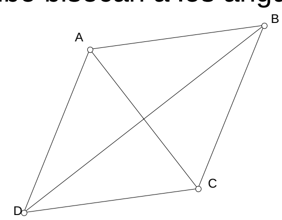
   El perímetro del triángulo original es P = a + b + c
   Los lados del triángulo pequeño son $\frac{a}{2}, \frac{\text{b}}{2}$ y $\frac{\text{c}}{2}$, de donde el perímetro de este es $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{P}{2}$
8. Las diagonales AC y BD del paralelogramo ABCD se cortan en M. Demostrar que si los puntos X, Y están en lados opuestos del paralelogramo, y XY contiene a M, entonces M biseca a XY.

   Sea ABCD un paralelogramo, M es la intersección de las diagonales
   Sean X en AB y Y en CD tales que XY pasa por M P. D. M biseca a XY



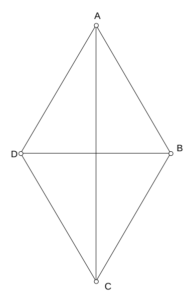
$\angle XBM = \angle YDM$ ya que $XB \parallel YD$
$\angle BMX = \angle DMY$ ya que son opuestos por el vértice
$BM = DM$ fue probado anteriormente
$\Delta DMY \cong \Delta BMX$ por criterio ALA
$XM = YM$ que son lados correspondientes en triángulos congruentes
$\Rightarrow$ M es punto medio de XY
Por lo tanto M biseca a XY

9. Mostrar que las diagonales de un rombo bisecan a los ángulos del rombo.



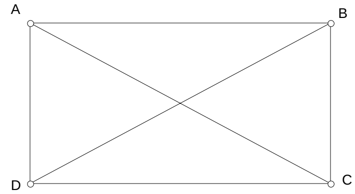
spg P. D. BD biseca a $\angle ABC$
$\angle ABD = \angle CDB$ ya que $AB \parallel CD$. $BC = CD \Rightarrow \Delta BCD$ es isósceles
$\Rightarrow \angle CBD = \angle CDB \Rightarrow \angle ABD = \angle CBD \Rightarrow$ BD es bisectriz de $\angle ABC$
análogamente BD es bisectriz de $\angle CDA$
De manera análoga con la diagonal AC

10. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
Sea ABCD un rombo P. D. $AC \perp BD$



ABCD es un paralelogramo por definición de rombo. $AB = BC$ y $AD = DC$ también por la definición.
Luego $AD = BC$ por propiedad de paralelogramo.
Se sabe que $AD \parallel BC$, entonces $\angle ADB = \angle CBD$. Además $AD = AB \Rightarrow \Delta ABD$ es isósceles $\Rightarrow \angle ADB = \angle ABD \Rightarrow \angle CBD = \angle ABD \Rightarrow$ BD es bisectriz de $\angle ABC$
Como ΔABC es isósceles, ya que $AB = BC$
También BD es mediatriz. Por lo tanto $BD \perp AC$

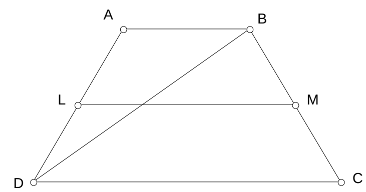
11. Mostrar que las diagonales de un rectángulo son congruentes.



Sea ABCD un rectángulo P. D. $AC = BD$

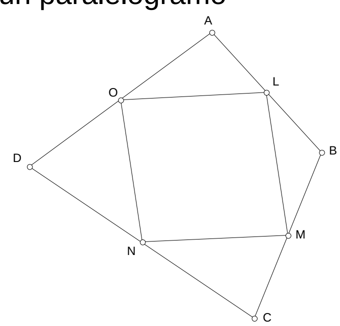
Por ser un rectángulo $\angle ABC = 90$, $\angle BCD = 90$, entonces $\angle ABC = \angle BCD$
AB = CD por ser un paralelogramo y BC = BC, luego $\Delta ABC \cong \Delta DCB$
Por lo tanto CA = BD

12. El segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un trapecio es igual a la semisuma de los lados paralelos.



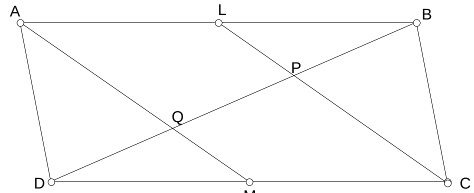
Sean ABCD un trapecio isósceles con AD = BC, L punto medio de AD y M punto medio de BC
L punto medio, entonces AL = LD; M punto medio, entonces BM = MC, luego se tiene
$\frac{AL}{LD} = \frac{BM}{MC} = 1$, entonces LM $\parallel$ DC y LM $\parallel$ AB.
Sea N el punto de intersección de BD y LM
NM $\parallel$ DC y M es punto medio de BC $\Rightarrow$ N es punto medio de BD y además NM = ½ DC
Análogamente LN = ½ AB
Luego LM = LN + NM = ½ AB + ½ DC = ½ (AB + DC)

13. Dado cualquier cuadrilátero, el cuadrilátero formado por los puntos medios de cada lado, es un paralelogramo.
Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera. Sean L, M, N y O puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. P. D. LMNO es un paralelogramo



En ΔABD se tiene OL $\parallel$ BD,
en ΔABC LM $\parallel$ AC
en ΔBCD MN $\parallel$ BD
y en ΔCDA NO $\parallel$ AC
por lo tanto LMNO es un paralelogramo

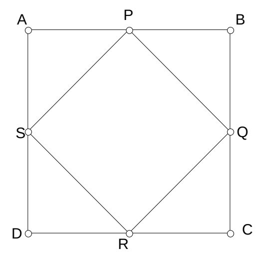
14. Si ABCD es un paralelogramo en el que L y M son puntos medios de AB y CD respectivamente, demostrar que los segmentos LC y AM dividen a la diagonal en tres segmentos congruentes.
Sean P y Q puntos sobre BD tales que P es la intersección de LC con BD, Q es la intersección de AM con BD. P. D. DQ = QP = PB



AB = CD $\Rightarrow$ AL = LB = CM = MD $\Rightarrow$ LB = MD
BC = DA pues son opuestos en un paralelogramo

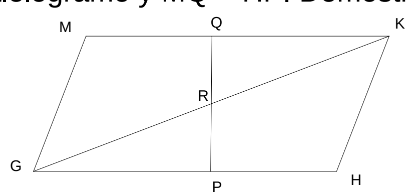
$\angle$LBC = $\angle$MDA son opuestos en un paralelogramo
$\Rightarrow$ ΔLBC $\cong$ ΔMDA $\Rightarrow$ LC = MA $\Rightarrow$ ALCM es un paralelogramo, entonces LC $\parallel$ MA
Como AB $\parallel$ CD, $\angle$BLC = $\angle$LCM, también $\angle$LCM = $\angle$DMQ pues LC $\parallel$ MA
$\Rightarrow$ $\angle$BLP = $\angle$DMQ. Así mismo $\angle$LBP = $\angle$MDQ ya que AB $\parallel$ CD.
De donde ΔLPB $\cong$ ΔMQD, luego DQ = BP
Como LC $\parallel$ MA $\Rightarrow$ ΔLPB $\approx$ ΔAQB, además $\frac{BL}{LA} = 1$, pues L es punto medio de AB
$\Rightarrow$ $\frac{BP}{PQ} = 1$, por transitividad $\Rightarrow$ BP = PQ
Por lo tanto DQ = QP = PB

15. Si ABCD es un cuadrado y P, Q, R y S son los puntos medios de AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demostrar que $\angle$PQR = $\angle$PSR.



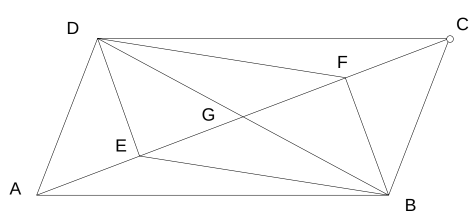
ABCD es cuadrado, entonces es un cuadrilátero, como P, Q, R y S son puntos medios, entonces PQRS es un paralelogramo por un problema anterior
Entonces $\angle$PQR = $\angle$PSR por ser un paralelogramo

16. El cuadrilátero GHKM es un paralelogramo y MQ = HP. Demostrar que GK y PQ se bisecan.



Sea R el punto de intersección de QP con GK P. D. QR = RP y GR = RK
MQ = HP $\Rightarrow$ QK = PG ya que QK = MK – MQ y PG = HG – HP y MK = HG
$\angle$KQR = $\angle$GPR y también $\angle$QKR = $\angle$GPR ya que QK $\parallel$ GP
luego ΔQKR $\cong$ ΔPGR por criterio ALA
$\Rightarrow$ QR =PR y GR = KR por ser lados correspondientes en triángulos congruentes
Por lo tanto QP y KG se bisecan

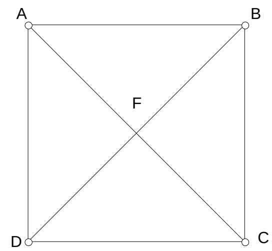
17. En la figura, DEBF es un paralelogramo y AE = CF. Demostrar que ABCD es un paralelogramo.



Como DEBF es un paralelogramo, entonces DB y FE se bisecan
luego DG = BG y EG = GF
Además AE = FC, entonces AE + EG = GF + FC, de donde AG = GC
$\angle$DGC = $\angle$BGA pues son opuestos por el vértice $\Rightarrow$ ΔDCG $\cong$ ΔBAG por criterio LAL

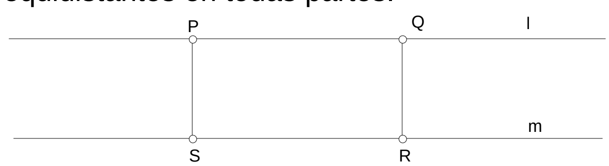
$\Rightarrow \angle DCG = \angle BAG \Rightarrow DC \parallel BA$
$\angle DGA = \angle BGC$ por opuestos por el vértice $\Rightarrow \Delta AGD \cong \Delta CGB$, criterio LAL
$\Rightarrow \angle BCG = \angle DAC \Rightarrow AD \parallel CB$
Por lo tanto ABCD es un paralelogramo

18. En el cuadrilátero ABCD, $AC \perp BD$ en F, AC = BD y FD = FC. Demostrar que $\Delta ACD \cong \Delta BDC$.



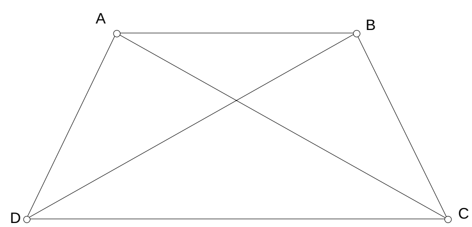
AC = BD, FD = FC, entonces el triángulo DFC es isósceles
Luego $\angle FDC = \angle FCD$
DC = DC, entonces $\Delta ACD \cong \Delta BDC$ por criterio LAL

19. Dos rectas paralelas son equidistantes en todas partes.



Sean l y m rectas paralelas. Sean P y Q dos puntos en l. Si QR es la distancia de l a m desde Q y PS es la distancia de l a m desde P, P. D. QR = PS
PS es la distancia de l a m desde P, entonces $PS \perp m$; QR es la distancia de l a m desde Q, entonces $QR \perp m$. Luego $QR \parallel PS$
Como $l \parallel m$, entonces $PQ \parallel RS$, de donde PQRS es paralelogramo.
Por lo tanto QR = PS

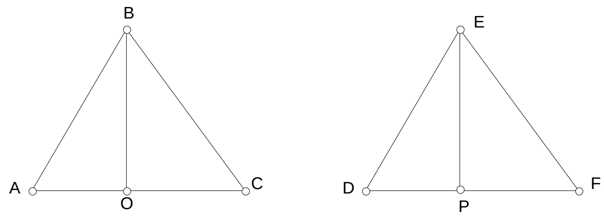
20. Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes.
Sea ABCD un trapecio isósceles con AD = BC. P. D. BD = AC



AD = BC
$\angle ADC = \angle BCD$
DC = CD
$\Delta ADC \cong \Delta BCD$
$\Rightarrow AC = BD$

8.5 Ejercicios 6.7

1. Si dos triángulos son congruentes, sus áreas son congruentes.
   Sean ∆ABC y ∆DEF dos triángulos congruentes

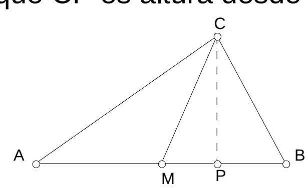


   P. D. ∆ABC y ∆DEF tienen áreas congruentes

   Sean CO la altura desde C en el triángulo ∆ABC y FP la altura desde F en ∆DEF
   ∠COA = ∠FPD pues ambos son rectos, además ∠OAC = ∠PDF pues son ángulos correspondientes entre triángulos congruentes
   Luego, por suma de ángulos internos se tiene ∠ACO = ∠DFP
   Por ser lados correspondientes en triángulos congruentes se tiene CA = FD
   Entonces ∆CAO ≅ ∆FDP, de donde CO = FP
   Ahora se tiene: área(ABC) = ½ (AB*CO) = ½ (DE*FP) = área(DEF)
   Por lo que área(ABC) = área(DEF)

qed

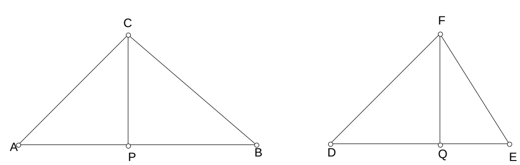
2. La mediana de un triángulo divide al triángulo en dos triángulos de áreas congruentes.
   Sea ABC un triángulo cualquiera. spg sea M punto medio de AB
   Sea P un punto sobre AB de manera que CP es altura desde C



   CM es mediana y AM = MB
   CP es altura de ∆ACM y también de ∆MCB
   Luego ½ (AM*CP) = ½ (MB*CP)
   Por lo que área(ACM) = área(MCB)

lqqd

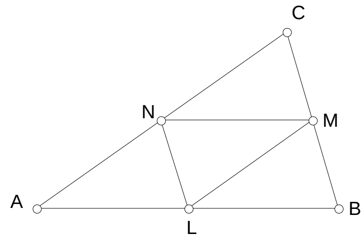
3. Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.



   Sean ∆ABC y ∆DEF dos triángulos tales que CP ⊥ AB, con P un punto sobre AB, también FQ ⊥ DE, con Q sobre DE y además CP = FQ
   Ahora se tiene $$área(ABC) = \frac{\frac{AB \times CP}{2}}{\frac{DE \times FQ}{2}} = \frac{2AB \times CP}{2DE \times FQ} = \frac{AB \times CP}{DE \times FQ} = \frac{AB}{DE}$$
   Por lo que la razón de las áreas es igual a la razón de las bases

qed

4. Si se unen los puntos medios de un triángulo cualquiera, los segmentos dividen al triángulo en 4 regiones de áreas congruentes.
   Sea ABC un triángulo arbitrario. Sean L, M y N los puntos medios de AB, BC y CA, respectivamente.



L es punto medio de AB, entonces AL = LB, M es punto medio de BC, luego BM = MC y N es punto medio de CA, de donde CN =NA. También por ser puntos medios se tiene:

$LM \parallel AC$ y $LM = \frac{1}{2} AC$, $MN \parallel AB$ y $MN = \frac{1}{2} AB$, $NL \parallel BC$ y $NL = \frac{1}{2} BC$

Luego LM = NC = NA, LN = MC = BM y NM = LB = AL

Entonces CNLM, NMBL y NMLA son paralelogramos

De esto se tiene $\angle NCM = \angle MLN$, $\angle MNL = \angle LBM$ y $\angle NML = \angle LAN$

De donde $\Delta NCM \cong \Delta NLM$, $\Delta MLN \cong \Delta LMB$ y $\Delta MLN \cong \Delta NAL$ todos utilizando el criterio de congruencia LAL

Así se tiene $\Delta NCM \cong \Delta LMB \cong \Delta NAL$, por lo que

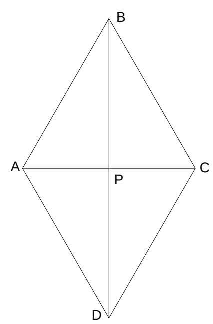
$$\text{área}(NCM) = \text{área}(LMB) = \text{área}(NAL)$$

qed

5. El área de un rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales.

Sea ABCD un rombo

P. D. área(ABCD) = ½ (AC*BD)



AC y BD son perpendiculares, entonces $AC \perp BD$

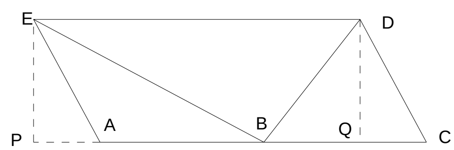
Si P es la intersección de AC y BD, BP es altura de ΔABC y DP es altura de ΔADC

Luego área(ABCD) = área(ABC) + área(ADC) = ½ (AC*BP) + ½ (AC*PD)

= ½ AC(BP + PD) = ½ (AC*BD)

Por lo tanto, el área del rombo es igual a la mitad del producto de las diagonales

6. En la figura, B es el punto medio de AC, y $ED \parallel AC$. Demuéstrese que $\Delta ABE = \Delta BCD$.



Sea EP altura del triángulo ABE y DQ altura del triángulo BDC

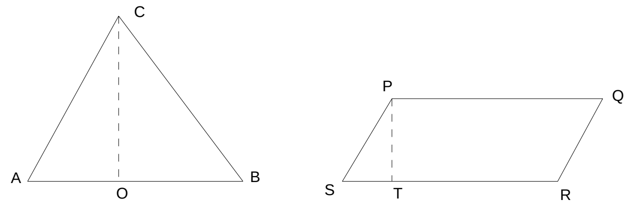
EP y DQ son distancias de la recta ED a la recta AC

Como $ED \parallel AB$, entonces EP = DQ

B es punto medio de AC, entonces AB = BC

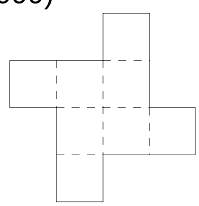
Luego área(ABE) = ½ (AB*EP) = ½ (BC*DQ) = área(BCD)

7. Un triángulo y un paralelogramo tienen áreas iguales y bases iguales. ¿Cómo comparan sus alturas?



Sean el triángulo ΔABC y el paralelogramo □PQRS dos polígonos con áreas iguales, tales que AB = SR. Sean CO altura de ΔABC y PT altura de □PQRS
Además área(ABC) = área(PQRS), entonces ½ (AB*CO) = SR*PT
Luego $\frac{AB \times CO}{SR \times PT} = 2$, además como AB = SR entonces $\frac{CO}{PT} = 2$
Por lo tanto la razón de las alturas es CO : PT = 2:1

8. En la siguiente figura los lados grandes y chicos son todos iguales entre si. Los lados chicos miden la mitad de los grandes. Todos los ángulos son rectos y el área es 200 cm^2. ¿Cuál es el perímetro de la figura? (Examen de Ubicación OMMor, 1999)

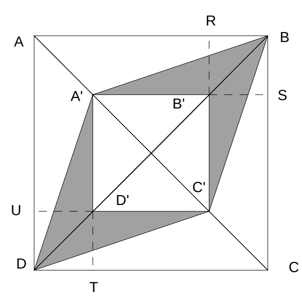


Si l es la longitud del lado chico, entonces el perímetro de la figura es 16 l
Si dividimos la figura en pequeños cuadros de lado l, tenemos 8 cuadritos. Cada cuadrito tiene área l^2; como el área de la figura es 200, se tiene:

$$l^2 = \frac{200}{8} = 25$$
$$\Rightarrow l = 5$$

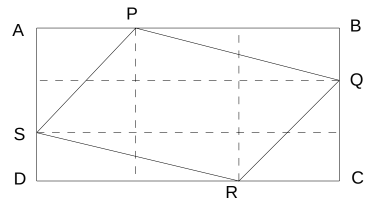
Luego 16l = 16 * 5 = 80
Entonces el perímetro de la figura es 80 cm^2

9. En la siguiente figura ABCD es un cuadrado. AB = 12. S A', B', C' y D' son puntos medios de AO, BO, CO y DO respectivamente, encontrar el área de la región sombreada. (Examen Estatal de la XIII OMMor, 1999)



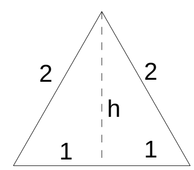
Sean S la intersección de A'B' con BC, T el punto de intersección de A'D' con DC, R el punto de intersección de B'C' con AB y U el punto de intersección de D'C' con AD.
AB = 12, entonces A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = ½ AB = 6
Y por construcción, BS = BR = UD = DT = RB' = B'S = D'U = D'T = ¼ AB = 3
Luego área(A'B'B) = área(B'C'B) = área(D'C'D) = área(A'D'D) = ½ (6*3) = 9
Entonces el área sombreada es igual a 9*4 = 36

10. En la figura los puntos P, Q, R y S dividen cada lado del rectángulo en razón 1:2. ¿ Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo PQRS y el área de ABCD? (Examen Canguro Matemático 2000)



Si dividimos el rectángulo por rectas paralelas a los lados formando pequeños rectángulos congruentes entre sí, el rectángulo ABCD tiene 9 rectángulo pequeños, y 4 de ellos , en partes, quedan fuera del paralelogramo PQRS, así que el paralelogramo PQRS ocupa 5 de ellos, por lo que área(PQRS) = 5/9 área(ABCD)

11. Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 2, y también el área de un triángulo equilátero de lado k.
Primero se encontrará el área del triángulo de lado 2:

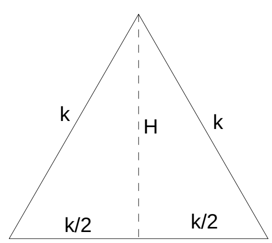


Se encontrará la altura h, recordando que el lado es b = 2

$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Entonces $área = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Ahora se encontrará el área de lado k:

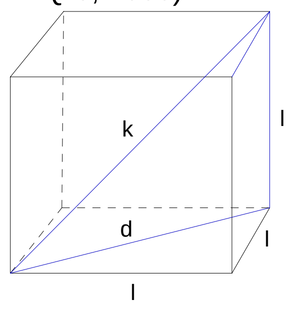


Se encontrará la altura H

$$H = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{k^2 - \frac{k^2}{4}} = \sqrt{k^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = k\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{k\sqrt{3}}{2}$$

Entonces $Área = \dfrac{k \times H}{2} = \dfrac{k \times \frac{k\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{k^2\sqrt{3}}{4}$

12. Un cubo se encuentra inscrito en una esfera cuyo radio mide 1 cm. ¿Cuál es la longitud del lado del cubo? (Recopilación de problemas OMMQro, 2000)



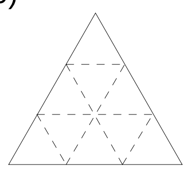
Se ha graficado el cubo, sea l la longitud de la arista. Si d es la diagonal de las caras, su valor es: $d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}$

Ahora, se calcula la longitud de una diagonal del cubo:

$k=\sqrt{d^2+l^2}=\sqrt{\left(l\sqrt{2}\right)^2+l^2}=\sqrt{2l^2+l^2}=\sqrt{3l^2}=l\sqrt{3}$

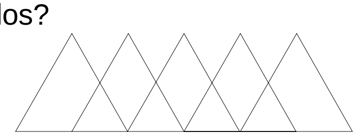
Luego, para encontrar el lado, hay que recordar que el radio de la esfera es 1, entonces k = 2. Entonces se tiene $l\sqrt{3}=2$, entonces hay que despejar l que es el lado buscado, por lo que $l=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

13. En un triángulo equilátero de papel se doblan las tres esquinas hacia adentro de tal manera que los tres vértices queden justo en el centro del triángulo. Describir el contorno de la figura obtenida. (Recopilación de problemas OMMQro, 2000)



Al doblar las esquinas hacia el centro, como éste es el baricentro, se forma la figura punteada, entonces, la figura obtenida es un hexágono regular.

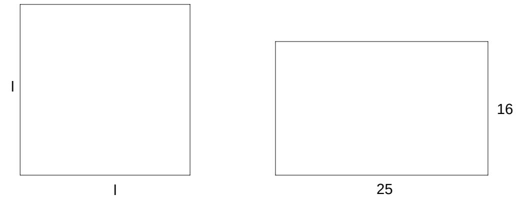
14. Cinco triángulos equiláteros, cada uno de lado $2\sqrt{3}$, son arreglados de tal manera que todos ellos están del mismo lado de una línea que contiene un lado de cada uno. Sobre la línea, el punto medio de la base de un triángulo es un vértice del siguiente. ¿Cuál es el área de la región del plano que es cubierta por la unión de los triángulos?



El área de cada triángulo equilátero es $A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ y si l = $2\sqrt{3}$, entonces

$A=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4\times 3\times\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$, luego, como son cinco triángulos el área que cubren los cinco es $15\sqrt{3}$, pero hay 4 pequeños triángulos en común, así que habrá que restar el área de estos, que además son igual a la cuarta parte de cada triángulo equilátero, es decir, juntos cubren el área de un triángulo de tamaño original, luego, el área de la región cubierta es: $15\sqrt{3}-3\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

15. Un cuadrado y un rectángulo tienen áreas iguales. Si el rectángulo mide 25 cm, por 16 cm. ¿Cuál es la longitud de un lado del cuadrado?

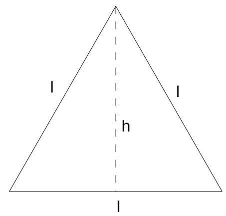


Sean A = l^2 el área del cuadrado y A = 25*16 = 400 el área del rectángulo, entonces se tiene:

$$l^2=400 \Rightarrow l=\sqrt{400}=20$$

Por lo que el lado del cuadrado mide 20 cm.

16. La altura de un triángulo equilátero es 12. Determinar la longitud de un lado y el área del triángulo.

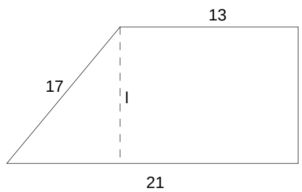


Se tiene que la altura del triángulo es h = 12, y se sabe que el área del triángulo equilátero de lado l es: $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ y también es $A = \frac{l \times h}{2} = \frac{12l}{2} = 6l$, entonces

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 6l \;\Rightarrow\; \frac{l\sqrt{3}}{4} = 6 \;\Rightarrow\; l = \frac{6\times 4}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

Por lo que $l = 8\sqrt{3}$

17. Un trapecio tiene lados paralelos de 13 cm y 21 cm de longitud. El lado más largo de los lados no paralelos mide 17 cm y el más corto es perpendicular a los lados paralelos. Calcúlese el área del trapecio.



Observando el triángulo formado en la figura, se puede encontrar el lado faltante, que es además la altura del trapecio, así se tiene:

$$17^2 = l^2 + (21-13)^2 = l^2 + 8^2 = l^2 + 64 \;\Rightarrow\; l^2 = 289 - 64 = 225 \;\Rightarrow\; l = \sqrt{225} = 15$$

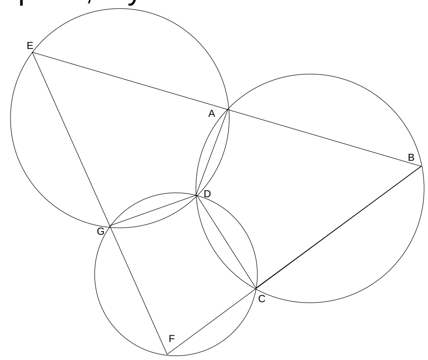
Con esto, se puede encontrar el área:

$$A = \frac{(21+13)l}{2} = \frac{34\times 15}{2} = \frac{510}{2} = 255$$

Luego, el área buscada es 255 cm^2

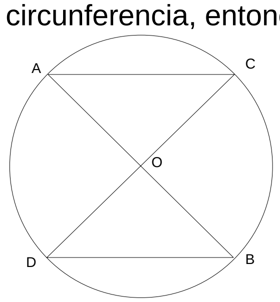
8.6 Ejercicios 7.5

1. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico, una circunferencia C_1 que pasa por A y D corta a la recta AB en E, y otra circunferencia C_2 que pasa por C y D corta a la recta BC en F. Sea G el segundo punto de intersección de C_1 y C_2. Muestre que E, F y G son colineales.



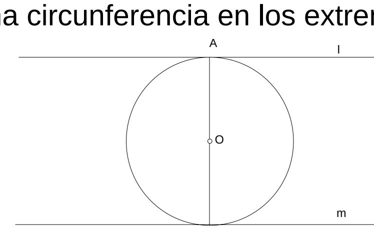
Como AEGD es un cuadrilátero cíclico, entonces $\angle EAD + \angle DGE = 180º$
Como DCFG es un cuadrilátero cíclico, entonces $\angle DCF + \angle FGD = 180º$
Luego $\angle EAD + \angle DGE + \angle DCF + \angle FGD = 360º$
Pero $\angle EAD = \angle DCB$ ya que ambos son suplemento a $\angle DAB$
Y también $\angle DAB = \angle DCF$ pues ambos son suplemento a $\angle DCB$
Además $\angle EAD$ es suplemento de $\angle DAB$, entonces $\angle EAD + \angle DAB = 180º$
De donde $\angle EAD + \angle DCF = 180º$
Luego $\angle DGE + \angle FGD = 360º - 180º = 180º$
Por lo tanto E, G y F son colineales

2. Si AB y CD son dos diámetros de una circunferencia, entonces AC = BD y AC $\parallel$ BD.



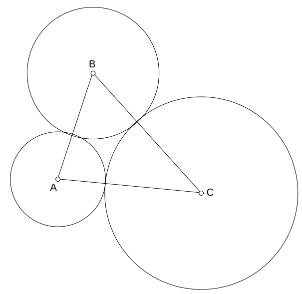
AB y CD son diámetros de la circunferencia. Si O es el centro entonces CD y AB se cortan en O. Además O biseca a AB y a CD
OC = OA = OB = OD, luego ΔCOA y ΔABD son isósceles y como $\angle COA = \angle DOB$
Entonces $\Delta COA \cong \Delta DOB$, de donde AC = DB.
Ahora, ACBD es un cuadrilátero cíclico, entonces $\angle ACD = \angle ABD$ y como los triángulos son isósceles, entonces $\angle ABD = \angle ODB$, por lo que $\angle ACO = \angle ODB$
Por lo tanto AC $\parallel$ BD

3. Demostrar que las tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro son paralelas.



Sea C una circunferencia. AB un diámetro de C. Si l y m son tangentes a C en A y B, respectivamente, se tiene
$l \perp AB$ y $m \perp AB$, entonces $l \parallel m$

4. En la figura, cada una de las circunferencias con centros A, B y C es tangente a las otras dos. Si AB = 10, AC = 14 y BC = 18, determínese el radio de cada circunferencia.

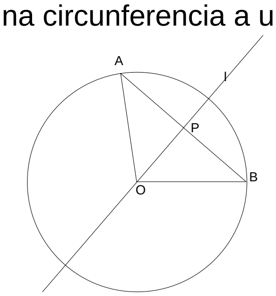


Sean r_1 el radio de la circunferencia con centro en A, r_2 el radio de la circunferencia con centro en B y r_3 el radio de la circunferencia con centro en C, entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 10 & (1) \\ r_2 + r_3 = 18 & (2) \\ r_1 + r_3 = 14 & (3) \end{cases}$$

Si a la ecuación (3) se le resta la ecuación (1), se tiene:
$r_3 – r_2 = 4$ (4)
Ahora, sumando las ecuaciones (2) y (4): $2r_3 = 22$
Por lo que $r_3 = 11$
Despejando r_2 en (2) y sustituyendo el valor de r_3, se tiene:
$r_2 = 18 – r_3 = 18 – 11 = 7$
luego $r_2 = 7$
Posteriormente despejando r_1 en (1) y sustituyendo el valor de r_2:
$r_1 = 10 – r_2 = 10 – 7 = 3$
Por lo que $r_1 = 3$, $r_2 = 7$ y $r_3 = 11$

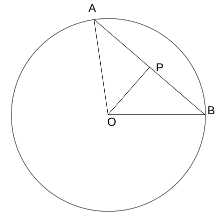
5. La perpendicular desde el centro de una circunferencia a una cuerda biseca a ésta.



Sea C una circunferencia con centro en O, sea AB una cuerda de C y l una recta que pasa por o y es perpendicular a AB. Si l y AB se intersecan en P, demostrar que P es punto medio de AB.

AO y OB son radios de C, luego AO = OB, entonces el triángulo AOB es isósceles
Por construcción l es altura de dicho triángulo, luego l es mediatriz del triángulo isósceles, luego l tiene que cortar en el punto medio de AB. Por lo tanto P es punto medio de AB.

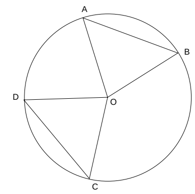
6. El segmento desde el centro de una circunferencia al punto medio de una cuerda es perpendicular a ésta.



Sea C una circunferencia con centro O. AB es una cuerda y P es el punto medio de AB. Demostrar que OP es perpendicular a AB.

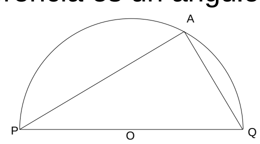
AO = OB ya que ambos son radios, entonces el triángulo AOB es isósceles. Como OP es mediana de dicho triángulo entonces OP es mediatriz de AB, luego OP $\perp$ AB

7. A cuerdas iguales corresponden arcos iguales.



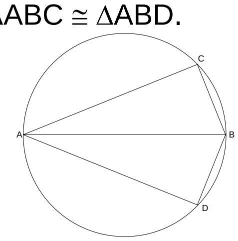
Sea C una circunferencia con centro en O, AB y CD cuerdas tales que AB = CD
O = OB = CO = OD ya que todos son radios
Como AB = CD, entonces ΔAOB $\cong$ ΔCOD por el criterio LLL
Entonces $\angle$AOB = $\angle$COD, por lo que los arcos AB y CD son congruentes

8. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.



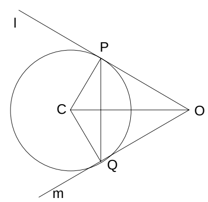
Sea C una semicircunferencia con centro O, PQ un diámetro. Si A es un punto arbitrario sobre la semicircunferencia, distinto de P y Q, demostrar que $\angle$PAQ = 90º
Como (POQ), entonces $\angle$POQ = 180º, como $\angle$PAQ = ½ $\angle$POQ = ½ 180º = 90º
Por lo tanto $\angle$PAQ = 90º

9. AB es un diámetro de una circunferencia y C y D son puntos de la misma a lados opuestos de AB tales que BC = BD. Demuéstrese que ΔABC $\cong$ ΔABD.



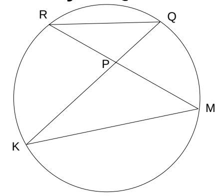
Se tiene $\angle$ACB = $\angle$ADB ya que ambos son rectos por el ejercicio anterior. CB = BD y AB = AB, luego como $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{AB^2 - BD^2} = AD \quad \Rightarrow \quad AC = AD$
Luego ΔABC $\cong$ ΔABD por el criterio LAL

10. Si dos tangentes a una circunferencia se intersecan, forman un triángulo isósceles con la cuerda que une los puntos de tangencia.



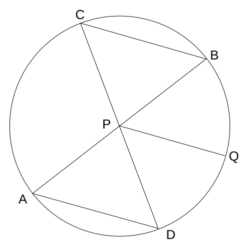
Sean l y m dos tangentes a una circunferencia en P y Q. Sea O el punto de intersección de l y m. Demostrar que ΔPOQ es isósceles
Si C es el centro de la circunferencia, entonces $\angle$CPO = $\angle$CQO = 90º, CP = CQ y CO = CO así que $PO = \sqrt{CO^2 - CP^2} = \sqrt{CO^2 - CQ^2} = QO \Rightarrow PO = QO$. Por lo que ΔPOQ es isósceles.

11. En la figura de la derecha, si RP = 8, MP = 6 y PQ = 3, calcular KQ



$\angle$QRM = $\angle$QKM y $\angle$RQK = $\angle$RMK ya que el cuadrilátero RQMK es cíclico
luego ΔRQP $\approx$ ΔKMP, por el criterio AA
entonces $\dfrac{RP}{KP} = \dfrac{PQ}{PM} \Rightarrow \dfrac{8}{KP} = \dfrac{3}{6}$, por lo que $KP = \dfrac{6 \times 8}{3} = \dfrac{48}{3} = 16$
Ahora KQ = KP + PQ = 16 + 3 = 19. Por lo que KQ = 19

12. Se da la circunferencia con centro P y, además, CB || PQ. Si $\angle$BCP = 55^0, determínense los ángulos $\angle$BPQ y $\angle$APD.



$\angle$BCD = $\angle$BAD ya que ADBC es un cuadrilátero cíclico.
Como BC || PQ entonces $\angle$CBP = $\angle$BPQ, como BC y AD son paralelas por un problema anterior, AB || PQ, luego $\angle$BPQ = $\angle$BAD, entonces $\angle$BPQ = 55º
$\angle$CBA = $\angle$CDA ya que son ángulos inscritos, entonces $\angle$APD = 180º - 110º = 70º
Por lo tanto $\angle$BPQ = 55º y $\angle$APD = 70º

9 BIBLIOGRAFÍA

- Bulajich-Gómez, **Geometría**. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas UNAM. México, 2002.

- Geltner-Peterson, **Geometría**. Editorial Thomson. México, 1998.

- Moise-Downs, **Geometría Moderna**. Addison-Wesley. Puerto Rico, 1996

- Olivera-Reynoso-Sosa-Valerio-Velázquez, **Recopilación de problemas**. Olimpiada de Matemáticas, Querétaro 2000. México, 2000.

- Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Morelos 1999. **Examen de ubicación**.

- Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Morelos 1999. **Examen de la XIII Olimpiada de Matemáticas**.

- Velázquez, **Apuntes de geometría.** Olimpiada Mexicana de Matemáticas Querétaro 2002.